Correspondance thêta locale ℓ-modulaire I : groupe métaplectique, représentation de Weil et Θ-lift

Justin Trias

Résumé

La correspondance thêta classique sur un corps local non archimédien F induit une bijection entre certains sous-ensembles de représentations irréductibles de deux groupes formant une paire duale dans un groupe symplectique. Cette bijection est définie à l'aide de la représentation de Weil, qui est une représentation à coefficients complexes. Dans cet article, on généralise la construction de la représentation de Weil pour les représentations ℓ-modulaires *i.e.* quand la caractéristique ℓ du corps des coefficients est différente de la caractéristique résiduelle de F. Pour ce faire, on prouve le théorème de Stone-von Neumann dans le cas ℓ-modulaire ; on définit aussi le groupe métaplectique modulaire qui, contrairement au cas classique, est scindé quand $\ell = 2$. Ces résultats ont également un sens quand F est un corps fini. Enfin, on formule une conjecture pour une correspondance thêta ℓ-modulaire. On montre tout d'abord que celle-ci se ramène à la considérer sur un clôture algébrique du corps des coefficients. Pour terminer, on donne une preuve de ces conjectures pour les représentations supercuspidales quand la caractéristique ℓ est bonne – on dira *banale* – vis-à-vis de la paire duale considérée. Dans ce dernier cas, la correspondance thêta est même compatible à la réduction modulo ℓ pour des représentations supercuspidales à coefficients ℓ-adiques.

Abstract

The classical theta correspondence on a non-archimedean local field F induces a bijection between two prescribed subsets of irreducible representations of a reductive dual pair in a symplectic group. This bijection is defined via the Weil representation, which has complex coefficients. In this paper, we generalise the construction of the Weil representation to ℓ-modular representations *i.e.* when the characteristic ℓ of the coefficient field is different from the residual characteristic of F. To do so, we prove Stone-von Neumann theorem in the ℓ-modular setting ; we define as well the modular metaplectic group, which happens to be split when $\ell = 2$ as opposed to the classical setting. Actually these constructions also make sense when F is a finite field. We eventually formulate a conjecture for the ℓ-modular theta correspondence. We first prove it is equivalent to considering it over the algebraic closure of the field of coefficients. To conclude, we give a proof of these conjectures in the supercuspidal case when the characteristic ℓ is good – we call it *banal* – with respect to the dual pair considered. In the latter case, the theta correspondence is even compatible to reduction modulo ℓ for ℓ-adic supercuspidal representations.

Remerciements : J'aimerais remercier Alberto Mínguez et Shaun Stevens pour leur soutien constant et leurs conseils durant la rédaction de cet article, ainsi que Nadir

Matringe et Wee Teck Gan pour avoir rapporté mon travail de thèse qui sert de base à ce premier papier. J'ai eu la chance de discuter avec Colette Moeglin, Marie-France Vignéras et Jean-Loup Waldspurger, qui ont éclairé ma compréhension du livre sur la correspondance thêta et au-delà. J'ai également pu compter sur des échanges enrichissants et stimulants avec Anne-Marie Aubert, Gianmarco Chinello, Jean-François Dat, Guy Henniart et Vincent Sécherre.

Introduction

La correspondance thêta sur un corps local établit une bijection θ entre des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles complexes de deux groupes provenant d'une paire duale dans un groupe symplectique. L'interprétation de cette bijection donne des informations arithmétiques profondes sur les représentations de chacun des deux groupes précédents. Par exemple, on peut relier cette bijection aux propriétés analytiques de fonctions L [Yam14] ou bien aux valeurs de facteurs ε [HKS96] ; ou encore établir des liens avec la correspondance de Langlands comme pour GSp_4 [GT11]. La correspondance thêta globale est construite à l'aide de sa version locale, *i.e.* celle sur des corps locaux, et entraîne des résultats majeurs pour la théorie des formes automorphes (formule de Siegel-Weil, formule du produit scalaire de Rallis, etc.).

Cet article est le premier d'une série en vue de développer une correspondance thêta locale ℓ-modulaire, ce qui signifie une correspondance thêta sur un corps p-adique F pour des représentations à coefficients dans $\bar{\mathbb{F}}_l$ avec $\ell \neq p$. Considérer de telles représentations sur des corps de caractéristique positive est intimement lié à des questions de congruences entre formes automorphes, ce qui constitue une source importante d'application.

0.1 Correspondance thêta locale classique

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique impaire et W un espace symplectique sur F de dimension finie. Soit $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ un caractère lisse non trivial. Le groupe métaplectique classique $\mathrm{Mp}(W)$ est, d'après [MVW87, Chap 2, II], l'extension centrale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\mathbb{C}^\times$ contenant le revêtement non trivial à deux feuillets de $\mathrm{Sp}(W)$. Pour tout sous-groupe H de $\mathrm{Sp}(W)$, on note $\widetilde{H}$ l'image réciproque de H dans $\mathrm{Mp}(W)$. En notant i l'inclusion naturelle de $\mathbb{C}^\times$ dans $\mathrm{Mp}(W)$, on définit la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H})$ des représentations lisses complexes (π, V) telles que $\pi \circ i(\lambda) = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. L'ensemble de ses classes d'équivalence de représentations irréductibles est $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H})$.

Soit $(\omega_\psi, S) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\mathrm{Mp}(W))$ un modèle de la représentation de Weil complexe [MVW87, Chap 2, II.6-II.8] associée à ψ. Selon [MVW87, Chap 1, I.20], une paire duale réductive irréductible (H_1, H_2) dans le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ est :

- soit constituée de deux groupes classiques, auquel cas elle est dite de type I ;
- soit de deux groupes linéaires, auquel cas elle est dite de type II.

De plus les images réciproques $\widetilde{H}_1$ et $\widetilde{H}_2$ commutent dans $\mathrm{Mp}(W)$. On a donc un morphisme de groupes $\widetilde{H}_1 \times \widetilde{H}_2 \to \mathrm{Mp}(W)$ donné par la multiplication qui permet de considérer (ω_ψ, S) comme une représentation de $\widetilde{H}_1 \times \widetilde{H}_2$ par restriction. Pour tout

$\pi_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$, le plus grand quotient π_1-isotypique de ω_ψ est de la forme $\pi_1 \otimes_{\mathbb{C}} \Theta(\pi_1)$ avec $\Theta(\pi_1) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_2)$. Dans le sens contraire, tout $\pi_2 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_2)$ définit une représentation $\Theta(\pi_2) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$ telle que le plus grand quotient π_2-isotypique de ω_ψ est $\Theta(\pi_2) \otimes_{\mathbb{C}} \pi_2$. Ces représentations $\Theta(-)$ sont de longueur finie, ce qui permet de définir leur plus grand quotient semi-simple, ou co-socle, noté $\theta(-)$.

Le résultat suivant constitue le cœur de la théorie et a nécessité le concours de différents spécialistes pour être prouvé dans sa plus grande généralité. On donne un panorama succinct de l'ensemble des contributions qui y ont mené dans l'Annexe A :

Théorème 0.1. *Pour toutes représentations irréductibles π_1 et π_1' dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$:*

a) *si $\Theta(\pi_1)$ n'est pas nulle, alors $\theta(\pi_1)$ est irréductible ;*

b) *quand $\Theta(\pi_1) \neq 0$, on a $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$ si et seulement si $\pi_1 \simeq \pi_1'$.*

Même si ce théorème n'est ici énoncé que pour les paires duales réductives irréductibles, il entraîne d'après [MVW87, Chap. 2, III.5 Rem. 2] le même résultat pour tout paire duale réductive (H_1, H_2) dans $\mathrm{Sp}(W)$. Il est important de souligner que les représentations $\Theta(-)$ et $\theta(-)$ ainsi définies dépendent du choix du caractère lisse non trivial $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ principalement parce que ω_ψ elle-même dépend de ce choix.

Définition 0.2 (Correspondance thêta locale classique)**.** Soit (H_1, H_2) une paire duale réductive dans $\mathrm{Sp}(W)$. La correspondance thêta locale classique sur F (associée à ψ) est définie comme la bijection induite par θ entre les ensembles :

$$\{\pi_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_{1,S}) \mid \Theta(\pi_1) \neq 0\} \overset{\theta}{\simeq} \{\pi_2 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_{2,S}) \mid \Theta(\pi_2) \neq 0\}.$$

Supercuspidales Pour ces relevés de paires duales, l'ensemble des sous-groupes paraboliques est défini dans [MVW87, Chap 3, II.4] et on peut donc parler de représentations supercuspidales. L'irréductibilité de $\Theta(\pi_1)$ quand π_1 est supercuspidale a constitué une première percée décisive en direction d'une preuve de la correspondance pour les paires de type I. On peut construire une suite (H_1, H_2^i) de paires duales de type I à partir de tours de Witt. Ici H_1 est fixe et la suite de groupes H_2^i est croissante. Plus précisément, si (H_1, H_2^0) est une paire duale dans $\mathrm{Sp}(W^0)$, alors (H_1, H_2^i) est une paire duale dans $\mathrm{Sp}(W^i)$ avec $\dim(W^i) = 2i + \dim(W^0)$. En choisissant convenablement des représentations de Weil ω_ψ^i pour chacun de ces index, ce procédé permet de considérer des propriétés de récurrence pour $\Theta^i(\pi_1) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_2^i)$.

Théorème 0.3. *Pour toute représentation supercuspidale $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$:*

a) *il existe $m_{\pi_1} \in \mathbb{N}$ tel que $\Theta^i(\pi_1) \neq 0 \Leftrightarrow i \geq m_{\pi_1}$;*

b) *$\Theta^{m_{\pi_1}}(\pi_1) = \theta^{m_{\pi_1}}(\pi_1)$ est supercuspidale ;*

c) *$\Theta^i(\pi_1) = \theta^i(\pi_1)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

On appelle premier indice d'occurrence l'entier m_{π_1}. Il est à noter que le troisième point est une conséquence du deuxième grâce aux méthodes de Kudla. Par conséquent, le fait que la première occurrence $\Theta^{m_{\pi_1}}(\pi_1)$ d'une supercuspidale π_1 soit irréductible et supercuspidale constitue un résultat clé de la théorie. Enfin, la conservation du support supercuspidal dans le cas général π_1 irréductible se déduit encore des filtrations obtenues par Kudla.

0.2 Vers une correspondance thêta modulaire

On voudrait obtenir une correspondance thêta locale ℓ-modulaire *i.e.* un analogue du Théorème 0.1 en remplaçant $\mathbb{C}$ par n'importe quel corps de coefficients. En général, si F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et G est un groupe réductif sur F, on appelle représentation ℓ-modulaire toute représentation lisse à coefficients dans un corps R de caractéristique $\ell \neq p$ et on note $\mathrm{Rep}_R(G)$ la catégorie correspondante.

Pour généraliser les résultats du paragraphe précédent, la première étape consiste à construire des représentations de Weil de groupes métaplectiques à coefficients dans R. Pour ce faire, il existe trois stratégies :

i) la première est l'approche originale de Weil [Wei64] qui a été étendue par Chinello et Turchetti [CT13] pour les représentations ℓ-modulaires ;
ii) la deuxième est basée sur le théorème de Stone-von Neumann [How79, MVW87], qui a des liens avec la première mais fournit davantage d'outils ;
iii) la troisième implique des méthodes géométriques [Shi12] sur une base localement noethérienne sans restriction sur la caractéristique.

Toutes trois mènent à l'obtention de représentations de Weil de groupes métaplectiques. Bien que la première et la dernière fournissent déjà des représentations de Weil à coefficients ℓ-modulaires, il paraît ensuite difficile d'étendre les outils classiques de la correspondance (tours de Witt, filtrations de Rallis et Kudla, scindages de relevés de paires duales et méthode dite du doubling) avec ces approches. De plus, en affinant la seconde, il n'est pas nécessaire de supposer l'existence dans R d'une racine carrée du cardinal résiduel q de F. Ce fait nouveau ne paraît pas visible autrement. Le lien entre la première méthode et la deuxième semble bien connu des experts [MVW87, Chap 2, Prop II.1] et est détaillé dans l'Annexe A.2 de [Tri19]. La seconde s'appuie de manière cruciale sur le théorème de Stone-von Neumann et présente l'avantage de fonctionner aussi bien pour les corps finis que pour les corps locaux non archimédiens.

Ce travail propose donc de généraliser [MVW87, Chap 2] au cadre des représentations ℓ-modulaires : le théorème de Stone-von Neumann modulaire fournira la représentation de Weil modulaire ainsi que le groupe métaplectique modulaire. La théorie présentera de nombreuses similarités avec le cas complexe tant que $\ell \neq 2$; quand $\ell = 2$ le groupe métaplectique modulaire est scindé. Dans le sillage de ces constructions, on considèrera également les scindages de relevés de paires duales. Toutefois, les scindages habituels ne sont pas toujours définis si le corps de base R n'est pas algébriquement clos, ce qui constitue une nouvelle différence en comparaison du cas complexe. Enfin, on formule une conjecture similaire au Théorème 0.1 quand la caractéristique ℓ est bonne – on dira *banale* – vis-à-vis des pro-ordres de H_1 et H_2. Comme premier résultat conclusif en caractéristique banale, on obtient à l'aide de méthode de réduction modulo ℓ un analogue du résultat clé b) du Théorème 0.3 (à savoir l'irréductibilité pour la première occurrence d'une supercuspidale) ; cela prouve en particulier la compatibilité de la correspondance thêta à la réduction modulo ℓ pour les supercuspidales.

0.3 Résultats

Représentation de Weil modulaire

Soit F un corps qui est, soit fini de caractéristique p, soit local non archimédien de caractéristique résiduelle p et de caractéristique différente de 2. Soit $(W, \langle , \rangle)$ un espace symplectique de dimension finie sur F dont on note $\mathrm{Sp}(W)$ le groupe symplectique associé. Soit R un corps de caractéristique ℓ. On suppose qu'il existe un caractère lisse non trivial $\psi : F \to R^\times$. Cette condition impose que $\ell \neq p$ d'après la Remarque 1.1 et se traduit en termes de racines de l'unité via :

$$\mu^p(R) = \begin{cases} \{\xi \in R^\times \mid \exists k \in \mathbb{N}, \xi^{p^k} = 1\} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \text{si } F \text{ est de caractéristique } 0\,; \\ \{\xi \in R^\times \mid \xi^p = 1\} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème de Stone-von Neumann

Le groupe d'Heisenberg H est le groupe localement profini formé de l'ensemble $W \times F$ muni de la topologie produit et de la loi de groupe :

$$(w,t) \cdot (w',t') = \left(w + w', t + t' + \frac{\langle w, w' \rangle}{2} \right).$$

On identifie F avec le centre de H via l'isomorphisme de groupes topologiques $t \mapsto (0,t)$, de sorte que ψ soit un caractère du centre de H. La catégorie des représentations lisses de H à coefficients dans R est notée $\mathrm{Rep}_R(H)$.

Quand R est le corps des nombres complexes, le théorème suivant est connu sous le nom de théorème de Stone-von Neumann [MVW87, Chap. 2, Th. I.2]. On le généralise dans la Section 2 pour les représentations modulaires *i.e.* à coefficients dans R :

Théorème A (Stone-von Neumann modulaire). *À isomorphisme près, il existe une unique représentation irréductible* (ρ_ψ, S) *dans* $\mathrm{Rep}_R(H)$ *dont le caractère central est* ψ.

On appelle représentation métaplectique associée à ψ l'unique classe d'équivalence qui provient du théorème. Un modèle de la représentation métaplectique est un représentant dans $\mathrm{Rep}_R(H)$ de cette classe d'équivalence. Les modèles de Schrödinger et les modèles latticiels, que l'on décrit dans la Section 2.2, occupent une place majeure dans la théorie parce qu'ils proviennent de formules très explicites. Ils permettent de faire des calculs concrets qui sont à la base de la correspondance thêta classique.

Groupe métaplectique

Soit (ρ_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ. On développe au début de la Section 3 les considérations suivantes. Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$, la représentation (ρ_ψ^g, S) définie par $\rho_\psi^g(w,t) = \rho_\psi(g^{-1}w, t)$ pour $(w,t) \in H$ est un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ. Elle est donc isomorphe à (ρ_ψ, S). Comme $\mathrm{Hom}_H(\rho_\psi^g, \rho_\psi) \simeq R$, l'action de $\mathrm{Sp}(W)$ sur (ρ_ψ, S) définit une représentation projective $\sigma_S : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}_R(S)$, qui se relève en une représentation $\omega_{\psi,S}$ d'une extension centrale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $R^\times$. Celle-ci est obtenue comme la première projection du produit fibré associé au morphisme quotient $\textsc{red}$ et à σ_S au-dessus de $\mathrm{PGL}_R(S)$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \arrow[r, "\omega_{\psi,S}"] \arrow[d, "p_S"] & \mathrm{GL}_R(S) \arrow[d, "\textsc{red}"] \\ \mathrm{Sp}(W) \arrow[r, "\sigma_S"] & \mathrm{PGL}_R(S) \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ est l'extension centrale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $R^\times$ en question et p_S est la seconde projection. On prouve dans la Section 3.1 que ces extensions centrales sont canoniquement isomorphes et le groupe dérivé :

$$\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) = [\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W), \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)]$$

est le groupe dérivé de $\mathrm{Sp}(W)$ si F est fini ou $\ell = 2$; l'unique extension centrale non triviale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\{\pm 1\}$ sinon. Ainsi quand $\ell = 2$, le groupe métaplectique est scindé. On explique également la structure d'extension centrale topologique dont le groupe métaplectique jouit.

Définition. La classe d'isomorphisme des extensions centrales topologiques $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$, où S parcourt les modèles de la représentation métaplectique associée à ψ, est appelée groupe métaplectique associé à ψ. Un modèle du groupe métaplectique est simplement un représentant de cette classe d'isomorphisme.

Représentation de Weil

Soit $\mathrm{Mp}(W)$ un modèle du groupe métaplectique associé à ψ. Pour tout modèle (ρ_ψ, S) de la représentation métaplectique associée à ψ, il existe par définition un isomorphisme φ_S d'extensions centrales topologiques :

$$\varphi_S : \mathrm{Mp}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W).$$

Qui plus est, un tel isomorphisme est unique sauf si $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F W = 2$. On choisit un système d'isomorphismes φ_S pour tout modèle et on définit :

Définition. La représentation de Weil modulaire associée à ψ est la classe d'isomorphisme des représentations $(\omega_{\psi,S} \circ \varphi_S, S)$ du groupe $\mathrm{Mp}(W)$. Un modèle de cette représentation de Weil modulaire est un représentant de cette classe d'isomorphisme.

Quelques commentaires sur cette représentation de Weil modulaire : il subsiste une ambiguïté quand $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F(W) = 2$ puisque cette classe d'isomorphisme dépend *a priori* du choix du système d'isomorphisme $\{\varphi_S\}$; le cas que l'on vient de mentionner est désigné comme exceptionnel et ne se produit évidemment pas quand F est local non archimédien. Dans tous les cas, la représentation de Weil modulaire est lisse admissible ; et sauf dans le cas exceptionnel, il suffit de connaître l'action du groupe dérivé $\widehat{\mathrm{Mp}}(W)$ de $\mathrm{Mp}(W)$ pour étudier la représentation de Weil modulaire.

Correspondance thêta locale ℓ-modulaire

À partir de maintenant, on suppose que F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et de caractéristique impaire.

Pour limiter au mieux la longueur du présent article, on ne cherche pas à prouver que la conjecture ci-dessous est vraie pour les paires de type I. Ce but sera plutôt poursuivi lors d'une publication ultérieure en suivant la deuxième moitié de [Tri19], parce que cela requiert encore l'introduction de plusieurs outils comme les filtrations de Rallis et de Kudla [MVW87, Chap. 3, IV], l'involution de MVW [MVW87, Chap. 4] et les stratégies de [GT16] et [GS17].

Définition de $\Theta(\pi_1)$ et conjecture

On reprend les notations de la Section 0.1 en remplaçant partout $\mathbb{C}$ par R. On fixe une paire duale irréductible (H_1, H_2) dans un groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$. Pour simplifier l'exposition, on suppose que R est algébriquement clos de caractéristique $\ell \neq p$.

Définition (Correspondance thêta ℓ-modulaire)**.** Soient π_1 et π_1' deux représentations irréductibles dans $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$. On considère les assertions suivantes :

(Θ_1) la représentation $\Theta(\pi_1)$ est de longueur finie, donc admet un co-socle noté $\theta(\pi_1)$;

(Θ_2) si $\Theta(\pi_1)$ n'est pas nulle, alors $\theta(\pi_1)$ est irréductible ;

(Θ_3) quand $\Theta(\pi_1) \neq 0$, on a $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$ si et seulement $\pi_1 \simeq \pi_1'$.

Quand ces trois énoncés sont valides pour tous π_1 et π_1', la « correspondance thêta locale ℓ-modulaire sur F » est alors définie comme la bijection induite par θ entre les ensembles :

$$\{\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1) \mid \Theta(\pi_1) \neq 0\} \overset{\theta}{\simeq} \{\pi_2 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_2) \mid \Theta(\pi_2) \neq 0\}.$$

Conjecture. *Il existe un ensemble fini $S_{(H_1,H_2)}$ de nombres premiers tel que pour tout corps algébriquement clos de caractéristique $\ell \notin S_{(H_1,H_2)}$, la correspondance thêta locale ℓ-modulaire sur F est valide.*

Cet ensemble fini dépend seulement de la paire (H_1, H_2) considérée. Pour les paires de type II, Mínguez a montré [Mín06] que la conjecture est vraie en prenant $S_{(H_1,H_2)}$ l'ensemble des diviseurs premiers des pro-ordres de H_1 et de H_2. Quand ℓ divise un de ces deux pro-ordres, on dira que ℓ est non banal vis-à-vis de (H_1, H_2) ; dans le cas contraire ℓ sera dit banal. Pour les paires de type I, il semblerait que l'utilisation de la méthode du doubling puisse entraîner que $S_{(H_1,H_2)}$ soit plus grand que les premiers non banaux vis-à-vis de (H_1, H_2) d'après [Tri19, Th 6.3.3.3]. Il existe des exemples (H_1, H_2, ℓ) dans lesquels (Θ_2) est mis en défaut, aussi bien pour des paires de type II [Mín06, Sec. 4.5.2] que pour des paires de type I [Tri19, Sec. 7.2]. Donc $S_{(H_1,H_2)}$ est a priori non vide.

Extension des scalaires pour la correspondance thêta

On donne l'application suivante des objets que l'on a développés, principalement pour formuler une correspondance thêta quand le corps de base n'est pas algébriquement clos. On fixe toujours une paire duale réductive (H_1, H_2) dans un groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$. Soient R un corps parfait de caractéristique $\ell \neq p$ et $\bar{R}$ une clôture algébrique de R. Soit $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$ irréductible (admissible) et D_1 son anneau des endomorphismes. Quand R est algébriquement clos on a $D_1 = R$; en général D_1 est une algèbre à division de dimension finie et centrale sur R. Le plus grand quotient π_1-isotypique de la représentation de Weil ω_ψ se factorise en $\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1$ où $\Theta(\pi) \in \mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$ est muni d'une structure de module à droite sur D_1 qui commute à l'action de groupe. Un tel $\Theta(\pi_1)$ est unique à isomorphisme de bimodules près. Dans la Section 5.2, on développe des énoncés (Θ'_1)-(Θ'_2)-(Θ'_3) sur R qui sont analogues aux énoncés (Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3) définis sur $\bar{R}$. L'action de D_1 complique quelque peu la situation, mais seulement en apparence car chacun de ces trois énoncés sur R et $\bar{R}$ est compatible à l'extension des scalaires au sens donné par les trois Propositions 5.6, 5.7 et 5.8. Finalement, on obtient le résultat de compatibilité du Théorème 5.9 que l'on résume ainsi :

Théorème B. *La correspondance thêta locale sur F à coefficients dans R est valide si et seulement si la correspondance thêta locale sur F à coefficients dans $\bar{R}$ l'est.*

Par conséquent, il est suffisant de considérer la situation où R est un corps algébriquement clos. Néanmoins, l'exemple qui clôt la Section 5.2 met en lumière une certaine compatibilité à l'action de Galois pour la descente depuis un corps algébriquement clos.

Compatibilité de la correspondance à la réduction modulo ℓ

Pour terminer, on considère dans la Section 5.3 le cas où π_1 est supercuspidale et on étudie la compatibilité à la réduction modulo ℓ de la correspondance thêta classique. Le même argument semble fonctionner pour les paires de type II, mais on le présente pour une paire duale (H_1, H_2) de type I. On obtient ainsi une généralisation de l'irréductibilité de la première occurrence dans les tours de Witt, à savoir le point b) du Théorème 0.3 dans le cas modulaire. Pour simplifier, on suppose que $\widetilde{H}_1$ et $\widetilde{H}_2$ sont scindés : on fixe alors des plongements de H_1 et H_2 dans ces relevés.

Soit $W(\overline{\mathbb{F}_\ell})$ l'anneau des vecteurs de Witt, dont on note K le corps des fractions et dont l'idéal maximal est engendré par ℓ. Une représentation absolument irréductible (super)cuspidale Π_1 dans $\mathrm{Rep}_K(H_1)$ est entière au sens où elle contient toujours un $W(\overline{\mathbb{F}_\ell})$-réseau (admissible) L_{Π_1} qui est stable par H_1. On peut alors considérer la réduction modulo ℓ de ce réseau $\pi_1 = L_{\Pi_1} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}_\ell})} \overline{\mathbb{F}_\ell}$, qui est une représentation cuspidale dont la semi-simplifiée ne dépend pas du choix de L_{Π_1} par le principe de Brauer-Nesbitt. Si ℓ

est banal vis-à-vis H_1, et si H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts [1], alors la représentation π_1 est irréductible. Quand la caractéristique résiduelle p de F est impaire, on sait décrire, à l'aide de la théorie des types, une représentation cuspidale π_1 comme une induite $\mathrm{ind}_J^{H_1}(\lambda)$ où J est un sous-groupe ouvert qui est compact modulo le centre et λ est une représentation irréductible de J. On a la compatibilité suivante, qui implique également (Θ_1) pour les supercuspidales en caractéristique banale :

Théorème C. *On suppose que H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts, que ℓ est banal vis-à-vis de H_1 et que F est de caractéristique résiduelle p impaire. Soit Π_1 une représentation absolument irréductible cuspidale dans $\mathrm{Rep}_K^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_1)$. Il existe alors un $W(\overline{\mathbb{F}_\ell})$-réseau stable $L_{\Theta(\Pi_1)}$ de $\Theta(\Pi_1)$ tel que les semi-simplifiées dans $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_2)$ des représentations :*

$$\mathfrak{r}_\ell(L_{\Theta(\Pi_1)}) = L_{\Theta(\Pi_1)}/\ell L_{\Theta(\Pi_1)} \text{ et } \Theta(\pi_1)$$

soient isomorphes. En particulier $\Theta(\pi_1)$ est de longueur finie.

La restriction sur la caractéristique résiduelle provient de l'utilisation d'un argument de théorie des types [KS20] qui montre, lors du Lemme 5.12, que l'idempotent central e_{Π_1} du centre de Bernstein associé à Π_1 est entier *i.e.* à coefficients dans $W(\overline{\mathbb{F}_\ell})$. On déduit du théorème précédent :

Corollaire D. *On reprend les hypothèses précédentes et on suppose de plus que ℓ est banal vis-à-vis de H_2. Alors si la représentation $\Theta(\Pi_1)$ est cuspidale non nulle, la représentation $\Theta(\pi_1)$ est irréductible.*

On obtient ainsi le point-clé b) du Théorème 0.3 quand la caractéristique ℓ est banale vis-à-vis de la paire duale. L'hypothèse $\Theta(\Pi_1)$ supercuspidale correspond à l'indice de première occurrence au sens de [Kud86]. Pour traiter le cas général à partir de cette première occurrence, il faudrait introduire comme dans [Tri19] les filtrations de Kudla dans les tours de Witt pour les représentations modulaires. Comme il a déjà été mentionné, cela fera l'objet d'une suite à cet article.

0.4 Contenu

Les préliminaires de la Section 1 sont l'occasion de définir les notations, ainsi que de poser les bases du facteur de Weil non normalisé, qui est une modification nouvelle du facteur de Weil usuel. On se sert de ce facteur dans la Section 3.5 pour donner une interprétation plus géométrique du cocycle métaplectique. Ces considérations sont d'une nature assez technique et n'entravent en rien la compréhension du reste du texte à condition de les admettre.

Les ossatures des Sections 2 et 3 sont similaires à celles de [MVW87, Chap. 2, I] et [MVW87, Chap. 2, II]. On a repris et généralisé le propos, aussi bien pour insister sur les différences avec le cas complexe que par un souci de donner un texte aussi auto-contenu

1. Cette condition est toujours satisfaite quand F est de caractéristique 0. On indique la Remarque 5.19 pour une discussion plus poussée sur ce point.

que possible. On l'espère détaillée et aussi claire que [MVW87, Chap. 2]. On décrit avec précision dans la Section 3.1 la topologie du groupe métaplectique. Une première différence apparaît quand la caractéristique du corps de base est 2 : le groupe métaplectique est alors scindé. La Section 3.5 apporte un nouvel éclairage sur la signification du cocycle métaplectique car la section classique [RR93, Thm 3.5] dite de Segal-Shale-Weil n'est pas définie quand le corps des coefficients ne contient pas de racine carrée du cardinal résiduel q. Pour cette raison, une modification du facteur de Weil classique est nécessaire ; on introduit dans les préliminaires cette autre constante qu'on appelle facteur de Weil non normalisé et qui s'interprète naturellement à l'aide de la transformée de Fourier.

La Section 4 constitue une généralisation de [Kud94] sur les scindages des relevés de paires duales. Il y a cependant des différences notables avec la théorie complexe, au sens où les problèmes de scindage dépendent du corps de base que l'on considère. À nouveau, ces changements sont principalement liés à l'existence ou non d'une racine carrée de q dans le corps des coefficients. Ces questions, en apparence techniques, revêtent une importance des plus cruciales [HKS96, p. 946] car elles permettent de relier des informations arithmétiques très concrètes à des questions portant sur la correspondance thêta. C'est pourquoi il faut porter une attention particulière aux comportements de ces scindages, surtout quand ceux-ci ne sont pas uniques ou qu'on les restreint à certains sous-groupes, comme dans la méthode des paires dites balançoires (seesaw).

La dernière section définit le Θ-relevé – ou Θ-lift – d'une représentation irréductible d'une paire duale (H_1, H_2). Par contraste avec le cas classique, il faut en plus prendre en compte l'action de l'anneau des endomorphismes de la représentation irréductible considérée quand le corps des coefficients n'est pas algébriquement clos. L'Annexe B développe dans ce contexte les résultats qui nous sont nécessaires en théorie des représentations, comme le comportement vis-à-vis de l'extension des scalaires ainsi que les liens avec la construction du plus grand quotient isotypique. On prouve enfin dans le Théorème 5.9 que quand le corps de base est parfait, il est équivalent de considérer les énoncés (Θ_1')-(Θ_2')-(Θ_3') sur ce corps de base ou les énoncés (Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3) sur une clôture algébrique. Pour terminer, la Section 5.3 explique la manière dont la correspondance thêta classique pour les supercusidales est compatible à la réduction des scalaires, le tout sous une hypothèse de banalité. On prouve ainsi l'irréductibilité pour le premier indice d'occurrence des supercuspidales en caractéristique banale.

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Notations et conventions

Dans tout cet article, F désigne un corps qui est, soit fini de caractéristique p, soit local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Néanmoins, on suppose que la caractéristique de F est toujours différente de 2. Le corps résiduel de F étant fini de caractéristique p, on note q son cardinal, qui est une puissance de p. La norme $|\cdot|_F$ sur F est, la norme triviale quand F est fini, la norme p-adique normalisée quand F est local non archimédien. Elle est normalisée au sens où la norme de toute uniformisante de F est q^{-1}. L'anneau des entiers de F est $\mathcal{O}_F$, où par convention $\mathcal{O}_F$ est le corps F tout entier dans le cas fini.

On réservera $(W, \langle , \rangle)$ pour désigner un espace symplectique de dimension finie n sur F muni de son produit symplectique $\langle , \rangle$. Pour tout sous-espace totalement isotrope

X dans W, on note $P(X)$ le stabilisateur de X dans $\mathrm{Sp}(W)$. C'est un parabolique maximal de $\mathrm{Sp}(W)$ pour lequel $N(X)$ désignera son radical unipotent et $M(X)$ un sous-groupe de Levi. Un lagrangien de W est un sous-espace totalement isotrope maximal, ou autrement dit, un sous-espace totalement isotrope de dimension m avec $n = 2m$. Deux lagrangiens X et Y de W donne une polarisation complète si $W = X + Y$. Dans ce cas $Y \simeq X^*$ via $y \mapsto \langle y, \cdot \rangle$, ce qui induit une dualité $a \in \mathrm{GL}_F(X) \mapsto a^* \in \mathrm{GL}_F(Y)$ ainsi que $c \in \mathrm{Hom}_F(X, Y) \mapsto c^* \in \mathrm{Hom}_F(X, Y)$. Plus généralement quand X est un sous-espace totalement isotrope quelconque, en donnant une décomposition $W = X + W^0 + Y$ où $Y \simeq X^*$ et W_1 est un espace symplectique orthogonal à l'espace symplectique $X + Y$, on a un isomorphisme canonique $M(X) \simeq \{(a, u) \mid a \in \mathrm{GL}_F(X), u \in \mathrm{Sp}(W^0)\}$. On note $\det_X$ le caractère de $P(X)$ qui à tout $p = m(a, u)n \in P(X)$, avec $m(a, u) \in M(X)$ et $n \in N(X)$, associe $|\det(a)|_F$.

La théorie des espaces ε-hermitiens généralise les notions d'espaces orthogonaux, symplectiques et unitaires. Il en sera fait un usage extrêmement bref et limité dans ce travail, aussi invite-t-on, pour les personnes désireuses d'un traitement complet de leur théorie, à consulter [MVW87, Chap. 1]. On rappelle brièvement le peu de vocabulaire dont on va faire usage ici. Un espace ε-hermitien de dimension n est scindé s'il possède un sous-espace totalement isotrope de dimension m tel que $n = 2m$. On s'autorise alors, et dans ce cas seulement, à utiliser le mot lagrangien pour signifier un sous-espace totalement isotrope maximal d'un espace scindé. Dans un espace ε-hermitien quelconque, il existe bien évidemment des sous-espaces totalement isotropes maximaux. Enfin, on note par la lettre U son groupe des isométries.

Soit R un anneau commutatif unitaire. Pour tout groupe localement profini G, on note $\mathrm{Rep}_R(G)$ la catégorie des représentations lisses de G à coefficients dans R. Le cadre d'étude de ces représentations est largement développé dans [Vig96, Chap. I], dont on donne quelques rappels succincts. On appelle aussi ces représentations des $R[G]$-modules lisses. Le foncteur $V \in R[G] - \mathrm{mod} \mapsto V^\infty \in \mathrm{Rep}_R(G)$ associe à un $R[G]$-module V sa partie lisse V^∞. Pour tout sous-groupe fermé H d'un groupe localement profini G, on désignera par Ind_H^G et ind_H^G les foncteurs d'induction et d'induction compacte respectivement. Ces foncteurs ne sont pas normalisés. D'après [Vig96, I.2.4], l'existence d'un sous-groupe ouvert de G de pro-ordre inversible dans R est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure de Haar μ_G de G à valeurs dans R. Pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, il existe au plus une mesure de Haar μ_K de G à valeurs dans R qui prenne la valeur 1 sur K. On désigne par $C^\infty(G, R)$ l'ensemble des fonctions sur G à valeurs dans R qui sont localement constante et par $C_c^\infty(G, R)$ le sous-espace de $C_c^\infty(G, R)$ des fonctions à support compact. Le contexte étant clair la plupart du temps, la référence à R sera sous-entendue en écrivant $C^\infty(G)$ et $C_c^\infty(G)$.

On note $\hat{F}_R$ le groupe des caractères lisses de F à valeurs dans R. Il est muni d'une structure d'espace vectoriel sur F, où l'addition correspond à la multiplication de deux caractères et la multiplication par un scalaire $\lambda \in F$ à $\lambda \cdot \psi : t \mapsto \psi(\lambda t)$ où $\psi \in \hat{F}_R$. Quand R est un corps, l'espace vectoriel $\hat{F}_R$ est de dimension au plus 1 sur F. Il est de dimension exactement 1 à condition qu'on ait :

$$\mu^p(R) = \begin{cases} \{\xi \in R^\times \mid \exists k \in \mathbb{N}, \xi^{p^k} = 1\} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \text{si } F \text{ est de caractéristique } 0\,; \\ \{\xi \in R^\times \mid \xi^p = 1\} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.1. En particulier, un tel corps R est de caractéristique ℓ différente de p.

Dans tout cet article, on se place sur un corps R où cette condition est réalisée, de sorte qu'il existe un caractère lisse non trivial $\psi : F \to R^\times$. On réserve dorénavant « R » et « ψ » pour désigner un tel corps et un tel caractère. On écrit indifféremment q pour désigner l'entier dans $\mathbb{Z}$ et son image dans R par la morphisme canonique $\mathbb{Z} \to R$. Quand S est un espace vectoriel sur R, on note $\mathrm{GL}_R(S)$ le groupe des endomorphismes inversibles de S et $\mathrm{RED} : \mathrm{GL}_R(S) \to \mathrm{PGL}_R(S)$ le morphisme de groupe quotient.

1.2 Facteur de Weil non normalisé

Soit X un espace vectoriel sur F de dimension finie m. Comme le pro-ordre de X est une puissance de p et la caractéristique ℓ de R est différente de p, il existe une mesure de Haar μ de X à valeurs dans R d'après [Vig96, I.2.4]. On définit dans cette partie une version non normalisée du facteur de Weil. Elle présente l'avantage d'être plus élémentaite et immédiate. On explique ensuite comment la relier au facteur de Weil habituel, c'est-à-dire tel que défini dans [Wei64, Per81, RR93] quand $R = \mathbb{C}$, et dont la généralisation quand R possède une racine carrée de q est effectuée dans [CT13].

Proposition 1.2. *Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur X. Il existe alors un unique élément $\Omega_\mu(\psi \circ Q)$ dans $R^\times$ tel que l'on ait pour tout $f \in C_c^\infty(X)$:*

$$\int_X \int_X f(y-x)\psi(Q(x))d\mu(x)d\mu(y) = \Omega_\mu(\psi \circ Q) \int_X f(x)d\mu(x).$$

Démonstration. L'application linéaire :

$$\mu' : f \in C_c^\infty(X) \mapsto \int_X \int_X f(y-x)\psi(Q(x))d\mu(x)d\mu(y) \in R$$

est une mesure de Haar de X à valeurs dans R, qui est bien évidemment non nulle. Par unicité de la mesure de Haar [Vig96, I.2.4], il existe un unique élément $c \in R^\times$ de sorte que $\mu' = c\mu$. □

Ce facteur $\Omega_\mu(\psi \circ Q)$ dépend bien évidemment du choix de μ comme la notation le suggère. On étend ce facteur à toute forme quadratique comme suit. Une forme quadratique Q est non dégénérée si son radical $\mathrm{rad}(Q)$ est réduit à 0. Toute forme quadratique Q sur X induit une forme quadratique Q_{nd} sur $X/\mathrm{rad}(Q)$ qui est non dégénérée.

Définition 1.3. Soit Q une forme quadratique sur X. Pour toute mesure de Haar μ de $X/\mathrm{rad}(Q)$ à valeurs dans R, on appelle *facteur de Weil non normalisé* la quantité :

$$\Omega_\mu(\psi \circ Q) := \Omega_\mu(\psi \circ Q_{\mathrm{nd}}).$$

Avant de présenter quelques propriétés de ce facteur, on introduit quelques considérations assez connues. Si X' est un espace vectoriel isomorphe à X, on note $\mathrm{Iso}_F(X, X')$ l'ensemble des isomorphismes d'espaces vectoriels entre X et X'. On écrit $\mathrm{Aut}_F(X)$ pour signifier $\mathrm{Iso}_F(X, X)$. Quand $X^* = \mathrm{Hom}_F(X, F)$ est le dual de X, l'ensemble $\mathrm{Iso}_F(X, X^*)$ est muni d'une involution $\rho \mapsto \rho^*$ donnée par la dualité. On définit :

$$\mathrm{Iso}_F^{\mathrm{sym}}(X, X^*) = \{\rho \in \mathrm{Iso}_F(X, X^*) \mid \rho = \rho^*\}.$$

Chacun de ces ensembles hérite, en tant que sous-ensembles de $\mathrm{Hom}_F(X, X')$, de la topologie naturelle de cet espace vectoriel de dimension fine.

Soit μ une mesure de Haar de X à valeurs dans R. Pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}_F(X)$, la mesure $\phi \cdot \mu = \mu \circ \phi^{-1}$ est une mesure de Haar de X. Elle est proportionnelle à μ par unicité de la mesure de Haar. Soit $|\phi| \in R^\times$ tel que $\phi \cdot \mu = |\phi| \times \mu$. Alors $|\phi|$ ne dépend pas du choix de μ, on l'appelle le module de ϕ. On a pour tout sous-groupe compact ouvert K de X :

$$|\phi| = \frac{\mathrm{vol}_{\phi \cdot \mu}(K)}{\mathrm{vol}_\mu(K)} = \frac{\mu(\phi^{-1}(K))}{\mu(K)}.$$

De plus, l'application module :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aut}_F(X) & \to & R^\times \\ \phi & \mapsto & |\phi| \end{array}$$

est localement constante et définit un morphisme de groupes. En d'autres termes, le module est un morphisme de groupes continu, où $R^\times$ est muni de la topologie discrète. On peut affiner la description de l'application module :

$$|\phi| = |\det_F(\phi)|_F \text{ pour tout } \phi \in \mathrm{Aut}_F(X).$$

En particulier, l'image de l'application module est $q^{\mathbb{Z}}$.

On peut également définir l'application module pour $\mathrm{Iso}_F(X, X^*)$ comme suit. Soit μ une mesure de Haar de X à valeurs dans R. La mesure duale μ^* de μ est l'unique mesure de Haar de X^* telle que l'application de transformée de Fourier :

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{F}_\mu & : & C_c^\infty(X) & \to & C_c^\infty(X^*) \\ & & f & \mapsto & \mathcal{F}_\mu f \end{array} \quad \text{où } \mathcal{F}_\mu f : x^* \mapsto \int_X \psi(x^*(x)) f(x) d\mu(x)$$

admette comme inverse :

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{F}_{\mu^*} & : & C_c^\infty(X^*) & \to & C_c^\infty(X) \\ & & h & \mapsto & \mathcal{F}_{\mu^*} h \end{array} \quad \text{où } \mathcal{F}_{\mu^*} h : x \mapsto \int_{X^*} \psi(-x^*(x)) h(x^*) d\mu^*(x^*).$$

Pour tout $\rho \in \mathrm{Iso}_F(X, X^*)$, la mesure $\rho \cdot \mu = \mu \circ \rho^{-1}$ est une mesure de Haar de X^*, proportionnelle à μ^* par unicité de la mesure de Haar. Soit $|\rho|_\mu \in R^\times$ tel que $\rho \cdot \mu = |\rho|_\mu \times \mu^*$. Alors $|\rho|_\mu$ dépend du choix de μ, mais seulement à un carré près de $R^\times$. On a pour tout sous-groupe compact ouvert K de X^* :

$$|\rho|_\mu = \frac{\mathrm{vol}_{\rho \cdot \mu}(K)}{\mathrm{vol}_{\mu^*}(K)} = \frac{\mu(\rho^{-1}(K))}{\mu^*(K)}.$$

De plus, l'application module :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Iso}_F(X, X^*) & \to & R^\times \\ \rho & \mapsto & |\rho|_\mu \end{array}$$

est localement constante et compatible à l'action de $\mathrm{Aut}_F(X)$ au sens où pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}_F(X)$ et tout $\rho \in \mathrm{Iso}_F(X, X^*)$, on a :

$$|\rho \circ \phi|_\mu = |\phi| \times |\rho|_\mu.$$

Le module ainsi défini est invariant par la dualité au sens où $|\rho|_\mu = |\rho^*|_\mu$. Quand K est un réseau de X, *i.e.* un sous-groupe compact ouvert de X muni d'une structure de $\mathcal{O}_F$-module, la quantité $|\rho|_{\mu_K}$ est une puissance de q.

Proposition 1.4. *Q désigne une forme quadratique sur X et μ une mesure sur X.*

a) *Si Q est la forme quadratique nulle, on a $\Omega_\mu(\psi \circ 0) = \mu(\{0\})$.*

b) *Pour tout $\lambda \in R^\times$, on a :*

$$\Omega_{\lambda\mu}(\psi \circ Q) = \lambda \times \Omega_\mu(\psi \circ Q).$$

c) *Pour tout X' de même dimension que X et pour tout $\phi \in \mathrm{Iso}_F(X, X')$, la forme quadratique $Q_\phi = Q \circ \phi^{-1}$ définie sur X' a pour radical $\phi(\mathrm{Ker}(Q))$. Alors :*

$$\Omega_{\phi\cdot\mu}(\psi \circ Q_\phi) = \Omega_\mu(\psi \circ Q).$$

En particulier, si $\phi \in \mathrm{Aut}_F(X)$ est tel que $\phi(\mathrm{rad}(Q)) = \mathrm{rad}(Q)$, on a :

$$\Omega_\mu(\psi \circ Q_\phi) = |\phi|^{-1} \times \Omega_\mu(\psi \circ Q).$$

d) *Le facteur de Weil non normalisé est compatible à la somme directe des formes quadratiques au sens suivant. Si $Q_1 \oplus Q_2$ est une forme quadratique sur $X_1 \oplus X_2$ somme de deux formes quadratiques Q_1 et Q_2 sur X_1 et X_2 respectivement, alors :*

$$\Omega_{\mu_1 \otimes \mu_2}(\psi \circ (Q_1 \oplus Q_2)) = \Omega_{\mu_1}(\psi \circ Q_1)\Omega_{\mu_2}(\psi \circ Q_2).$$

e) *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Iso}_F^{\mathrm{sym}}(X, X^*) & \to & R^\times \\ \rho & \mapsto & \Omega_\mu(\psi \circ Q_\rho) \end{array}, \text{ où } Q_\rho(x) = \rho(x)(x),$$

est localement constante. En d'autres termes, elle est continue en munissant R de la topologie discrète.

f) *On suppose que le corps R contient une racine carrée de q, que l'on fixe et note $q^{\frac{1}{2}}$. Soient $\rho \in \mathrm{Iso}_F^{\mathrm{sym}}(X, X^*)$ et K un réseau de X. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|\rho|_{\mu_K} = q^k$. Alors $|\rho|_\mu^{\frac{1}{2}} = \mu(K)(q^{\frac{1}{2}})^k$ est une racine carrée de $|\rho|_\mu$ qui ne dépend pas du choix de K et le facteur de Weil associé à la forme quadratique non dégénérée $Q_{\frac{1}{2}\rho}$ est :*

$$\omega(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho}) := \frac{\Omega_\mu(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho})}{|\rho|_\mu^{\frac{1}{2}}}.$$

g) *Pour tout $a \in F^\times$, on note $Q_a(x) = ax^2$ la forme quadratique sur F. Alors pour toute mesure de Haar μ de F, la quantité :*

$$\Omega_{a,b} = \frac{\Omega_\mu(\psi \circ Q_a)}{\Omega_\mu(\psi \circ Q_b)} \in R^\times$$

ne dépend pas du choix de μ. De plus, en notant $(\cdot,\cdot)_F$ le symbole de Hilbert de F, on a pour tout a et b dans $F^\times$:

$$(a,b)_F = \frac{\Omega_\mu(\psi \circ Q_1)\Omega_\mu(\psi \circ Q_{ab})}{\Omega_\mu(\psi \circ Q_a)\Omega_\mu(\psi \circ Q_b)} = \frac{\Omega_{ab,1}}{\Omega_{a,1}\Omega_{b,1}}.$$

Démonstration. a) b) c) Les deux premiers points sont immédiats. Le troisième résulte du changement de variable $x = \phi^{-1}(x')$ qui donne :

$$\Omega_\mu(\psi \circ Q_\phi) = \Omega_{\phi^{-1}\cdot\mu}(\psi \circ Q).$$

Comme $\phi^{-1} \cdot \mu = |\phi|^{-1} \times \mu$, le point b) donne $\Omega_{\phi^{-1}\cdot\mu}(\psi \circ Q) = |\phi|^{-1} \times \Omega_\mu(\psi \circ Q)$.

d) Vient de la définition de la mesure de Haar produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ de $X_1 \oplus X_2$, construite à partir de deux mesures de Haar μ_1 de X_1 et μ_2 de X_2 comme suit. L'application bilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(X_1) \times C_c^\infty(X_2) & \to & C_c^\infty(X_1 \oplus X_2) \\ (f_1, f_2) & \mapsto & \Big(F_{f_1,f_2} : (x_1,x_2) \mapsto f(x_1)f(x_2)\Big) \end{array}$$

induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $C_c^\infty(X_1) \otimes_R C_c^\infty(X_2) \simeq C_c^\infty(X_1 \oplus X_2)$. La mesure de Haar produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ est alors l'unique mesure définie pour tout $f_1 \in C_c^\infty(X_1)$ et tout $f_2 \in C_c^\infty(X_2)$ par $\mu_1 \otimes \mu_2(f_1 \otimes f_2) = \mu_1(f_1)\mu_2(f_2)$.

e) Ceci est vrai car, à $f \in C_c^\infty(X)$ fixé, l'application :

$$\rho \mapsto \int_X \int_X f(y-x)\psi(Q_\rho(x))d\mu(x)d\mu(y)$$

est localement constante.

f) La première partie de l'énoncé constitue des faits généraux élémentaires sur les mesures et les applications modules. Ensuite, le point 2. de [CT13, Prop. 3.3] évalué en $x^* = 0$ donne, en notant γ le facteur de Weil de $Q_{\frac{1}{2}\rho}$:

$$\int_X \int_X f(y-x)\psi(Q_{\frac{1}{2}\rho}(x))d\mu(x)d\mu(y) = \gamma\ |\rho|_\mu^{\frac{1}{2}} \int_X f(x)d\mu(x).$$

Par définition du facteur de Weil non normalisé, on a $\Omega_\mu(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho}) = \gamma|\rho|_\mu^{\frac{1}{2}}$.

g) D'après le point b), $\Omega_{a,b}$ est bien indépendant de μ. Enfin, quitte à adjoindre une racine carrée de q à R pour former une extension R' de R, on obtient que pour tout $a \in F^\times$, l'élément $|a| = |a|_F$ est un carré dans R'. Par conséquent, on a dans R' :

$$(a,b)_F = \frac{\omega(\psi \circ Q_1)\omega(\psi \circ Q_{ab})}{\omega(\psi \circ Q_a)\omega(\psi \circ Q_b)} = \frac{\Omega_\mu(\psi \circ Q_1)\Omega_\mu(\psi \circ Q_{ab})}{\Omega_\mu(\psi \circ Q_a)\Omega_\mu(\psi \circ Q_b)}$$

où la première égalité résulte de [CT13, 4.3] et la deuxième du point f) ici présent. Dans les membres de droite et de gauche, chacun des termes appartient à R donc l'égalité :

$$(a,b)_F = \frac{\Omega_\mu(\psi \circ Q_1)\Omega_\mu(\psi \circ Q_{ab})}{\Omega_\mu(\psi \circ Q_a)\Omega_\mu(\psi \circ Q_b)}$$

est valable dans R. $\square$

Le facteur non normalisé n'est *a priori* pas trivial quand la forme quadratique est scindée au sens des espaces ϵ-hermitiens, ce qui constitue une différence notable en comparaison du facteur de Weil classique. De plus, ce facteur non normalisé dépend de la réalisation de Q considérée au sens où il n'est pas invariant par isométrie d'après le point c). On a cependant une formule qui éclaire sa signification quand on réalise Q dans une base orthogonale de X.

Soient Q une forme quadratique non dégénérée sur X et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ une base orthogonale de X pour cette forme quadratique. Ce choix de base induit un isomorphisme de X vers F^m donné par les coordonnés et que l'on note $\phi_\mathcal{B}$. On fixe une mesure de Haar μ_F de F. On considère la mesure de Haar produit $\otimes\mu_F$ sur F^m qui se transporte en une mesure de Haar $\phi_\mathcal{B}^{-1} \cdot (\otimes\mu_F)$ de X. On pose $a_i = Q(v_i)$. La quantité $\det_\mathcal{B}(Q) = \prod a_i$ dépend du choix de la base $\mathcal{B}$, alors que l'invariant de Hasse $h_F(Q) = \prod_{i<j}(a_i, a_j)_F$ n'en dépend pas. On déduit des différents points de la Proposition 1.4 un corollaire qui en généralise le point g) :

Corollaire 1.5. *On a :*

$$\Omega_{\phi_\mathcal{B}^{-1}\cdot(\otimes\mu_F)}(\psi \circ Q) = \Omega_{\det_\mathcal{B}(Q),1} \times \Omega_{\mu_F}(\psi \circ Q_1)^m h_F(Q).$$

De plus, si $Q_{\mathrm{Id}_\mathcal{B}}$ désigne l'unique forme quadratique non dégénérée diagonale associée à l'identité sur la base $\mathcal{B}$, alors pour toute mesure de Haar μ de X :

$$\Omega_\mu(\psi \circ Q) = \Omega_{\det_\mathcal{B}(Q),1} \times \Omega_\mu(\psi \circ Q_{\mathrm{Id}_\mathcal{B}})h_F(Q).$$

Remarque 1.6. Par conséquent, la quantité $\Omega_{\det_\mathcal{B}(Q),1} \times \Omega_\mu(\psi \circ Q_{\mathrm{Id}_\mathcal{B}})$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$. Pour en donner une interprétation plus géométrique, pour tout autre choix de base $\mathcal{B}'$ qui diagonalise Q, la quantité $\det_{\mathcal{B}'}(Q)$ diffère de $\det_\mathcal{B}(Q)$ par le carré du déterminant du changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On observe que le point c) de la Proposition 1.4 garantit que cette différence transforme $\Omega_\mu(\psi \circ Q_{\mathrm{Id}_\mathcal{B}})$ en $\Omega_\mu(\psi \circ Q_{\mathrm{Id}_{\mathcal{B}'}})$.

Facteur de Weil. Grâce au point f) de la Proposition 1.4, il existe un lien avec le facteur de Weil quand le corps R possède une racine carrée de q. Une fois une telle racine $q^{\frac{1}{2}} \in R$ fixée, le facteur de Weil d'une forme quadratique Q non dégénérée est donc :

$$\omega(\psi \circ Q) = \frac{\Omega_\mu(\psi \circ Q)}{|\rho|_\mu^{\frac{1}{2}}}$$

où $\rho : x \mapsto Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ est la forme symétrique associée à $Q = Q_{\frac{1}{2}\rho}$. L'image du facteur de Weil est contenue, d'après [CT13, 4.3], dans l'ensemble des racines 4-èmes de l'unité de R si F n'est pas une extension finie de $\mathbb{Q}_2$ sans racine carrée de -1. Dans le cas contraire, on a $(-1,-1)_F=-1$ et l'image du facteur de Weil est seulement contenue dans l'ensemble des racines 8-èmes de l'unité.

Quand R ne contient pas de racine carrée de q, il faut utiliser $\Omega(\psi\circ Q)$ en toute généralité. Voici un exemple quand X est dimension 1 pour illustrer le propos. Prenons $F=\mathbb{F}_3((t))$ et $R=\mathbb{Q}[j]$, il existe alors un caractère lisse additif non trivial $\psi : F\to R^\times$. Bien que $\sqrt{3}\notin R$, on a cependant $i\sqrt{3}\in R$. Or, l'élément $\omega(\psi\circ Q)\in\mathbb{C}^\times$ est une racine 4-ème de l'unité. Cela signifie que pour toute forme quadratique Q telle que $|\rho|_\mu=3$, on peut prendre par exemple $\rho(x)(y)=txy$, son facteur de Weil non normalisé ne peut être que $i\sqrt{3}$ ou $-i\sqrt{3}$. Sont ainsi encodées dans ce facteur des propriétés arithmétiques de F qui, en un certain sens, ne dépendent pas de R.

Normalisation de la transformée de Fourier. On interprète maintenant ce facteur de Weil non normalisé comme un coefficient de normalisation pour la transformée de Fourier vis-à-vis de ψ. Ce facteur permet, pour tout $\rho\in\mathrm{Iso}_F^{\mathrm{sym}}(X,X^*)$, de donner une mesure μ_ρ qui est en un certain sens la plus naturelle pour la transformée de Fourier à coefficients dans R.

Proposition 1.7. *Soient $\rho\in\mathrm{Iso}_F^{\mathrm{sym}}(X,X^*)$ et μ une mesure de Haar de X.*

a) *La mesure de Haar :*
$$\mu_\rho=\Omega_\mu(\psi\circ Q_{\frac{1}{2}\rho})^{-1}\mu$$
ne dépend pas du choix de μ.

b) *Si l'on note $\star_{\mu_\rho}$ le produit de convolution dans $C_c^\infty(X)$ et $\times$ la multiplication des fonctions, l'opérateur suivant dit de transformée de Fourier :*
$$\mathcal{F}_{\mu_\rho} : f\in(C_c^\infty(X),\star_{\mu_\rho})\mapsto\left(x\mapsto\int_X\psi(\rho(x)(u))f(u)d\mu_\rho(u)\right)\in(C_c^\infty(X),\times)$$
est un isomorphisme d'algèbre.

c) *On pose :*
$$\varepsilon=\big(-1,\det(Q_{\frac{1}{2}\rho})\big)_F\times(\Omega_{-1,1})^m$$
qui vérifie :
$$\varepsilon^2=\big(-1,-1\big)_F^m.$$
Alors pour tout $f\in C_c^\infty(X)$, on a :
$$\mathcal{F}_{\mu_\rho}^4f=\varepsilon^2f \text{ et } \mathcal{F}_{\mu_\rho}^2f : x\mapsto\varepsilon f(-x).$$

Démonstration. a) D'après le point b) de la Proposition 1.4, la mesure μ_ρ ne dépend pas du choix de μ.

b) Ensuite, vérifier que $\mathcal{F}_{\mu_\rho}$ est un isomorphisme d'algèbre constitue un fait classique de transformée de Fourier [CT13, Prop. 1.2], que l'on rappelle succinctement. Tout d'abord, l'application est bien un automorphisme puisqu'elle est linéaire et que pour tout sous-groupe compact ouvert K de X, on a $\mathcal{F}_{\mu_\rho}1_K=\mu_\rho(K)\times 1_{K^\perp}$ où $K^\perp$ est le sous-groupe

compact ouvert $\{x \in X \mid \forall u \in X, \psi(\rho(x)(u)) = 1\}$. De même, il suffit de vérifier, pour les indicatrices seulement, la propriété d'être un morphisme d'algèbres.
c) Pour terminer, en reprenant les notations du paragraphe précédent, on a :

$$\mathcal{F}_{\mu_\rho}^2 1_K = \mu_\rho(K)\mu_\rho(K^\perp) \times 1_K.$$

On pose donc $\varepsilon = \mu_\rho(K)\mu_\rho(K^\perp)$. Par définition :

$$\varepsilon = \mu_\rho(K)\mu_\rho(K^\perp) = \Omega_\mu(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho})^{-2} \times \mu(K)\mu(K^\perp).$$

Alors, si K' désigne le sous-groupe ouvert compact $\{x^* \in X^* \mid \forall u \in X, \psi(x^*(u)) = 1\}$ dans X^*, on a :

$$\mu(K)\mu(K^\perp) = \frac{\mu(\rho^{-1}K')}{\mu^*(K')} = |\rho|_\mu.$$

On déduit de :

$$\Omega_\mu(\psi \circ Q_{-\frac{1}{2}\rho}) = \frac{|\rho|_\mu}{\Omega_\mu(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho})}$$

qu'on a :

$$\varepsilon = \frac{\Omega_\mu(\psi \circ Q_{-\frac{1}{2}\rho})}{\Omega_\mu(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho})}.$$

D'après le Corollaire 1.5, comme les deux formes quadratiques $Q_{-\frac{1}{2}\rho}$ et $Q_{\frac{1}{2}\rho}$ peuvent se diagonaliser dans la même base $\mathcal{B}$ de X, cette quantité se réécrit :

$$\varepsilon = \frac{\Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{-\frac{1}{2}\rho}),1}}{\Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{\frac{1}{2}\rho}),1}} \times \frac{h_F(Q_{-\frac{1}{2}\rho})}{h_F(Q_{\frac{1}{2}\rho})}.$$

D'une part, comme $\det_{\mathcal{B}}(Q_{-\frac{1}{2}\rho}) = (-1)^m \det_{\mathcal{B}}(Q_{\frac{1}{2}\rho})$, on déduit du point g) de la Proposition 1.4 l'égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{-\frac{1}{2}\rho}),1}}{\Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{\frac{1}{2}\rho}),1}} &= \Omega_{(-1)^m,1} \times \big((-1)^m, \det_{\mathcal{B}}(Q_{\frac{1}{2}\rho})\big)_F \\
&= (\Omega_{-1,1})^m \times (-1,-1)_F^{\frac{m(m-1)}{2}} \times \Big(\big(-1, \det_{\mathcal{B}}(Q_{\frac{1}{2}\rho})\big)_F\Big)^m.
\end{aligned}$$

D'autre part, de $(-a_i, -a_j)_F = (-1, -a_i a_j)_F \times (a_i, a_j)_F$, on tire l'égalité :

$$\begin{aligned}
h_F(Q_{-\frac{1}{2}\rho}) &= \big(-1, (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \det(Q_{\frac{1}{2}\rho})^{m-1}\big)\big)_F \times h_F(Q_{\frac{1}{2}\rho}) \\
&= (-1,-1)_F^{\frac{m(m-1)}{2}} \times \Big(\big(-1, \det(Q_{\frac{1}{2}\rho})\big)_F\Big)^{m-1} \times h_F(Q_{\frac{1}{2}\rho}).
\end{aligned}$$

Donc on obtient l'égalité recherchée pour ε. Toujours en invoquant le point g) de la Proposition 1.4, le carré de $\Omega_{-1,1}$ est bien $(\Omega_{-1,1})^2 = (-1,-1)_F$.

Concernant les puissances de l'opérateur $\mathcal{F}_{\mu_\rho}$, un argument classique consiste à examiner l'image d'indicatrices de la forme 1_{x+K}, où x est un élément de X et K un sous-groupe compact ouvert de X. Ceci constitue un fait habituel en transformée de Fourier. Pour terminer, le prouver pour les fonctions indicatrices est suffisant puisqu'on déduit par linéarité le résultat pour toute fonction dans $C_c^\infty(X)$. $\square$

Définition 1.8. On appelle *R-transformée de Fourier* l'opérateur $\mathcal{F}_{\mu_\rho}$.

On revient sur l'exemple en dimension 1 avec $F = \mathbb{F}_3((t))$, $\mathcal{O}_F = \mathbb{F}_3[[t]]$ et $R = \mathbb{Q}(j)$. Soient $\psi : F \to R^\times$ le caractère lisse non trivial de noyau $\mathcal{O}_F$ et μ une mesure de F normalisée sur $\mathcal{O}_F$. En notant $(\mathcal{O}_F)' = \{x^* \in F^* \mid \forall x \in \mathcal{O}_F, \psi(x^*(x)) = 1\}$, on a que μ^* est la mesure de F^* normalisée sur $(\mathcal{O}_F)'$. On considère maintenant le morphisme symétrique :

$$\rho : x \in F \mapsto (\rho(x) : y \mapsto txy) \in F^*$$

dont le module est $|\rho|_\mu = \mu(\rho^{-1}(\mathcal{O}_F)') = \mu(t^{-1}\mathcal{O}_F) = |t^{-1}|_F = 3$. Dans ce cas, on a montré que $\omega(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho}) \in \{\pm i\}$. Donc la transformée de Fourier classique :

$$\mathcal{F} : f \in C_c^\infty(F, \mathbb{C}) \mapsto \left(x \mapsto \int_F \psi(\rho(x)(u)) f(u) d\mu_F(u) \right) \in C_c^\infty(F, \mathbb{C})$$

définie pour la mesure auto-duale $\mu_F = (\sqrt{3})^{-1}\mu$ n'est pas définie sur R, mais l'est en revanche sur $R' = R[\sqrt{3}]$. Elle vérifie pour tout $f \in C_c^\infty(X, R')$, les relations habituelles $\mathcal{F}^4 f = f$ et $\mathcal{F}^2 f : x \mapsto f(-x)$. Par conséquent, le choix naturel de normalisation pour la transformée de Fourier à coefficients dans R vis-à-vis de ρ et ψ consiste plutôt à considérer l'opérateur $\mathcal{F}_{\mu_\rho}$. Dans ce cas, on a $\varepsilon = (-1) \times \Omega_{-1,1}$ et l'application $\mathcal{F}_{\mu_\rho}$ de R-transformée de Fourier vérifie $\mathcal{F}_{\mu_\rho}^4 f = f$ et $\mathcal{F}_{\mu_\rho}^2 f : x \mapsto \varepsilon f(-x)$.

2 Représentations métaplectiques modulaires

Le groupe d'Heisenberg $H(W, \langle \ , \ \rangle)$, abrégé en H quand le contexte est clair, est l'ensemble $W \times F$ muni de la topologie produit et de la loi de groupe :

$$(w, t) \cdot (w', t') = \left(w + w', t + t' + \frac{\langle w, w' \rangle}{2} \right).$$

On identifie F avec le centre de H via l'isomorphisme de groupes topologiques $t \mapsto (0, t)$, ainsi que W avec le sous-ensemble $W \times 0$ de H via l'homéomorphisme $\delta : w \mapsto (w, 0)$.

2.1 Théorème de Stone-von Neumann modulaire

Le résultat ci-dessous est une généralisation du théorème de Stone-von Neumann pour les représentations à coefficients complexes [MVW87, Chap. 2, Th. I.2] et sera donc appelé *théorème de Stone-von Neumann modulaire*. On rappelle qu'ici R est un corps commutatif arbitraire tel qu'il existe un caractère non trivial de F.

Théorème 2.1. *Soit $\psi \in \hat{F}_R$ un caractère non trivial. À isomorphisme près, il existe une unique représentation irréductible $(\rho_\psi, S) \in \mathrm{Rep}_R(H)$ de caractère central ψ.*

Démonstration. Il s'agit de généraliser la preuve de [MVW87, Chap. 2, Th I.2] dont les arguments restent valables dans le cas modulaire. Passons en revue rapidement cette stratégie. Un premier candidat qui vient à l'esprit est l'induite compacte $\mathrm{ind}_F^H(\psi)$ qui, en plus d'être lisse, a pour caractère central ψ. Cependant, cette représentation n'est pas irréductible. Néanmoins, il existe des induites compactes plus fines que cette dernière et qui se révèleront irréductibles. On définit l'orthogonal d'un sous-groupe fermé A de W par $A^\perp = \{w \in W \mid \forall a \in A,\ \psi(\langle w, a \rangle) = 1\}$. Les arguments de [MVW87, Chap. 2, I.3] se vérifient sans difficulté dans le cas modulaire et on obtient ainsi :

Lemme 2.2. *On suppose que A est* auto-dual *i.e. $A = A^\perp$. Alors :*

a) *il existe un caractère lisse ψ_A du sous-groupe $A_H = A \times F$ de H dont la restriction à F est ψ ;*
b) *pour tout caractère lisse ψ_A de A_H prolongeant ψ, l'induite compacte $\mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ est irréductible.*

Par conséquent l'existence de (ρ_ψ, S) comme dans le théorème est assurée par le fait qu'il existe des sous-groupes auto-duaux, comme les lagrangiens ou les réseaux auto-duaux.

Ensuite on peut généraliser le résultat [MVW87, Chap. 2, Lem I.6] dont la preuve [MVW87, Chap. 2, I.5] repose sur les propriétés d'inversion des transformées de Fourier et qui sont valides [Vig96, I.3.10] dans le cas modulaire :

Lemme 2.3. *Soit $(\rho_\psi, S) \in \mathrm{Rep}_R(H)$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1. Alors :*

$$\rho_\psi^\vee \otimes_R \rho_\psi \simeq \mathrm{ind}_F^H(\psi) \text{ dans } \mathrm{Rep}_R(H \times H).$$

L'unicité est alors une conséquence de ce lemme. En effet, considérant l'action par multiplication à droite, la représentation $\mathrm{ind}_F^H(\psi) \in \mathrm{Rep}_R(H)$ est alors $\mathrm{ind}_{H'}^H(\psi')$-isotypique. De plus, pour tout $\pi \in \mathrm{Rep}_R(H)$ irréductible de caractère central ψ, le plus grand quotient π-isotypique de $C_c^\infty(H)$ est $C_c^\infty(H) \twoheadrightarrow \pi^\vee \otimes_R \pi$. Ce dernier se factorise par $\mathrm{ind}_F^H(\psi)$ et cela entraîne $\pi \simeq \mathrm{ind}_{H'}^H(\psi')$. Le théorème est donc prouvé. □

2.2 Modèles des représentations métaplectiques

Le théorème de Stone-von Neumman modulaire assure que pour tout caractère lisse non trivial $\psi : F \to R$, il existe une unique classe d'isomorphisme de représentations irréductibles du groupe d'Heisenberg H dont le caractère central est ψ. On nomme désormais *représentation métaplectique associée à ψ* cette unique classe d'isomorphisme ρ_ψ et, par extension, toute représentation qui appartient à cette unique classe. Les représentations $S_A = \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ qui sont construites au Lemme 2.2 fournissent des modèles explicites de la représentation métaplectique associée à ψ. Ceux-ci ont été particulièrement étudiés quand A est :

- un lagrangien (modèle de Schrödinger) ;
- un réseau auto-dual sur un corps local non archimédien (modèle latticiel).

Modèle de Schrödinger. Soit $W = X + Y$ une polarisation complète de W. Le sous-espace vectoriel X est un sous-espace auto-dual de W. On pose $S_X = \mathrm{ind}_{X_H}^H(\psi_X)$ où $\psi_X((w,t)) = \psi(t)$ est un caractère de $X_H = X \times F$. La restriction à Y définit un isomorphisme de représentations $S_X \simeq C_c^\infty(Y)$ où l'action sur le second membre est rendue explicite pour $h = (w_X + w_Y, t) \in H$ et $f \in C_c^\infty(Y)$ à l'aide d'un calcul simple :

$$\rho_\psi(h)f : y \in Y \mapsto \psi\bigg(\langle y, w_X\rangle + \frac{1}{2}\langle w_Y, w_X\rangle + t\bigg) f(y + w_Y) \in R.$$

Modèle latticiel. On suppose que F est local non archimédien. On note $\mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de son anneau des entiers $\mathcal{O}_F$. Soit l_ψ le niveau – ou conducteur – de ψ. C'est le plus petit entier relatif n tel qu'on ait $\mathcal{P}_F^n \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Soit A un réseau de W *i.e.* un sous-$\mathcal{O}_F$-module de type fini et de rang maximal. On a alors :

$$A^\perp = \{w \in W \mid \forall a \in A,\ \langle w, a\rangle \in \mathcal{P}_F^{l_\psi}\}.$$

C'est de nouveau un réseau de W, qui peut s'exprimer facilement dans une base hyperbolique. Par exemple, si $(e_i)_{|i| \in [\![1, \dim W]\!]}$ désigne une base hyperbolique de W, il existe des entiers relatifs a_i tels que $A = \bigoplus \mathcal{P}_F^{a_i} e_i$. Alors $A^\perp = \bigoplus \mathcal{P}_F^{l_\psi - a_i} e_{-i}$. Il est auto-dual à condition que l'on ait $l_\psi = a_i + a_{-i}$. Quand cette condition est vérifiée, il existe d'après le Lemme 2.2 un caractère ψ_A de $A_H = A \times F$ dont la restriction à F est ψ. Enfin, en posant $S_A = \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$, la restriction à W induit un isomorphisme de représentations entre S_A et le sous-espace de fonctions de $C_c^\infty(W)$ qui vérifient :

$$f(a + w) = \psi_A(\langle w, a\rangle) f(w) \text{ , pour tout } a \in A \text{ et } w \in W.$$

L'action de $h = (w,t) \in H$ sur un élément $f \in C_c^\infty(W)$ dans ce sous-espace est rendue explicite à l'aide d'un calcul simple :

$$\rho_\psi(h)f : w' \mapsto \psi(t)\psi\bigg(\frac{1}{2}\langle w', w\rangle\bigg) f(w' + w).$$

2.3 Propriétés des représentations métaplectiques

Dans ce paragraphe on donne quelques propriétés de la représentation métaplectique. Notamment cette classe d'isomorphisme est canonique, admissible et de contragrédiente explicite. Quand A est un sous-groupe auto-dual on reprend la notation $S_A = \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ pour ψ_A qui étend ψ.

Proposition 2.4. *Soit ρ_ψ la représentation métaplectique associée à ψ. On a :*

a) *les représentations $\rho_\psi^\vee$ et $\rho_{\psi^{-1}}$ sont isomorphes ;*

b) *la représentation ρ_ψ est admissible, absolument irréductible et vérifie le lemme de Schur i.e.* $\mathrm{End}_{R[H]}(\rho_\psi) = R$ *;*

c) *toute représentation lisse (ρ, S) de H qui admet pour caractère central ψ est semi-simple ;*

d) *soient :*

- $(W_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ *et* $(W_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ *deux espaces symplectiques sur* F *;*
- $W = W_1 \oplus W_2$ *leur somme orthogonale ;*
- $H(W_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ *et* $H(W_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ *les groupes d'Heinseberg associés ;*
- ρ_ψ^1 *et* ρ_ψ^2 *les représentations métaplectiques respectives associées à* ψ.

Alors la représentation $\rho_\psi^1 \otimes \rho_\psi^2$ *s'identifie à la représentation métaplectique du groupe* $H(W, \langle\ ,\ \rangle)$. *La représentation suivante en est donc un modèle :*

$$(w_1 + w_2, t) \mapsto \psi(t) \times \left(\rho_\psi^1((w_1, 0)) \otimes \rho_\psi^2((w_2, 0))\right).$$

Démonstration. a) Résulte de la preuve du Lemme 2.3 où $\mathrm{ind}_{Y_H}^H(\psi_Y^{-1}) \simeq \mathrm{ind}_{X_H}^H(\psi_X)^\vee$ par une dualité construite explicitement pour toute polarisation complète $W = X \oplus Y$.
b) Par compatibilité à la contragrédiente de l'induction [Vig96, I.5.11], on voit que $\mathrm{ind}_{X_H}^H(\psi_X)^\vee \simeq \mathrm{Ind}_{X_H}^H(\psi_X^{-1})$ puisque les modules δ_H et δ_{X_H} sont triviaux étant donné que H et A_H sont limites de leurs pro-p-groupes. Par conséquent cette représentation est aussi égale à $\mathrm{ind}_{X_H}^H(\psi_X^{-1}) \simeq \mathrm{ind}_{Y_H}^H(\psi_Y^{-1})$. Cela entraîne que $\rho_{\psi^{-1}}$ est admissible pour tout ψ donc ρ_ψ l'est également. Ensuite pour toute extension de corps R' de R, on obtient, par compatibilité à l'extension des scalaires de l'induction compacte, que $S_A \otimes_R R' \in \mathrm{Rep}_{R'}(H)$ est la représentation métaplectique pour le caractère ψ vu comme caractère à valeurs dans R'. Enfin, la représentation ρ_ψ est admissible et absolument irréductible, donc elle vérifie le lemme de Schur. En effet, pour toute clôture algébrique $\bar{R}$ de R, on a $\mathrm{End}_{\bar{R}[H]}(S_A \otimes \bar{R}) = \bar{R}$ d'après [Vig96, I.6.9], ce qui entraîne que $\mathrm{End}_{R[H]}(S_A)$ est de dimension 1 sur R.
c) Ceci est une conséquence du Lemme 2.3 et de la discussion qui s'en suit. Cela simplifie grandement les arguments de [MVW87, Chap 2, Lem I.8] bien que l'on pourrait également remarquer que $(S_A)^{\psi_A}$ est de dimension 1 ici.

e) Comme les pro-ordres de nos groupes d'Heisenberg sont inversible dans R d'après la Remarque 1.1, la représentation $\rho_\psi^1 \otimes \rho_\psi^2$ du groupe $H(W_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \times H(W_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ est irréductible puisque ρ_ψ^1 et ρ_ψ^2 sont absolument irréductibles et admissibles. On note j le morphisme de groupes surjectif :

$$\begin{array}{rcl} H(W_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \times H(W_2, \langle\ ,\ \rangle_2) & \to & H(W, \langle\ ,\ \rangle) \\ ((w_1, t_1), (w_2, t_2)) & \mapsto & (w_1 + w_2, t_1 + t_2) \end{array}$$

dont le noyau est $\{((0,t),(0,-t)) \mid t \in F\}$. Par conséquent, la représentation $\rho_\psi^1 \otimes \rho_\psi^2$ se factorise par $H(W, \langle\ ,\ \rangle)$. Celle-ci reste irréductible, elle est bien évidemment lisse et a pour caractère central ψ. Donc c'est un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ d'après le Théorème 2.1. □

2.4 Changement de modèles $S_{A_1} \to S_{A_2}$

L'unicité affirmée par le Théorème 2.1 entraîne que deux modèles de la représentation métaplectique de H associée à ψ sont isomorphes. Ils le sont mêmes canoniquement au sens où il existe, à scalaire près, un unique tel isomorphisme d'après le point b) de la Proposition 2.4. Soient A_1 et A_2 deux sous-groupes auto-duaux de W. Puisque $\mathcal{O}_F$ est local, principal et complet, il vient en vertu de [Vig96, I.C.5] que le sous-groupe $A_1 + A_2$ est d'indice fini dans un sous-groupe fermé de W. Ce sous-groupe est donc lui-même fermé, ce qui garantit l'égalité $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1 + A_2$ et constitue un progrès vis-à-vis de [MVW87, Chap 2, Rem I.7]. On note ψ_{A_1} et ψ_{A_2} des caractères de $A_{1,H} = A_1 \times F$ et $A_{2,H} = A_2 \times F$ respectivement, dont la restriction à F est ψ. On peut alors définir explicitement un morphisme d'entrelacement entre S_{A_1} et S_{A_2} qu'on appelle *changement de modèles.*

Proposition 2.5. *Soit μ une mesure de Haar sur $A_{1,H} \cap A_{2,H} \backslash A_{2,H} = A_1 \cap A_2 \backslash A_2$ à valeurs dans R. Soit $\omega \in W$ vérifiant la condition :*

$$\forall a \in A_1 \cap A_2, \ \psi_{A_1}((a,0))\psi_{A_2}((a,0))^{-1} = \psi(\langle a, \omega \rangle).$$

Alors l'application $I_{A_1,A_2,\mu,\omega}$ qui à $f \in S_{A_1}$ associe :

$$I_{A_1,A_2,\mu,\omega} f : h \longmapsto \int_{A_{1,H} \cap A_{2,H} \backslash A_{2,H}} \psi_{A_2}(a)^{-1} f((\omega,0)ah) \ d\mu(a)$$

est un isomorphisme de représentations qui engendre $\mathrm{Hom}_{R[H]}(S_{A_1}, S_{A_2}) \simeq R$.

Démonstration. Il y a un léger abus de notation puisque $a \mapsto \psi_{A_2}(a)^{-1} f((\omega,0)ah)$ est une fonction sur $A_{2,H}$. Mais cette fonction est invariante à gauche par $A_{1,H} \cap A_{2,H}$. Elle est bien à support compact modulo $A_{1,H} \cap A_{2,H}$ car l'hypothèse $A_1 + A_2$ fermé assure que l'image de $A_{2,H}$ dans $A_{1,H} \backslash H$ soit fermée. D'où la consistance de la notation et le caractère bien défini de l'intégrale. On vérifie sans difficulté que la fonction ainsi définie appartient à S_{A_2}. L'application de la proposition est donc un morphisme d'entrelacement entre deux représentations irréductibles de H. D'après le lemme de Schur, c'est un isomorphisme à condition qu'il soit non nul. Pour ce faire, il suffit de remarquer que l'image d'une fonction indicatrice $\chi_{w,L}$ de S_{A_1} est bien non nulle. Enfin, l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{R[H]}(S_{A_1}, S_{A_2})$ est de dimension 1 d'après le point b) de la Proposition 2.4. □

Remarque 2.6. L'expression du morphisme d'entrelacement précédent se simplifie grandement si $\psi_{A_1}((a,t)) = \psi(t)$ et $\psi_{A_2}((a,t)) = \psi(t)$, auquel cas $\omega = 0$ convient. On peut toujours trouver de tels caractères qui étendent ψ « trivialement » si l'une de ces conditions est vérifiée :

- $p \neq 2$;
- A_1 et A_2 sont des lagrangiens.

Dans ce cas, on a $I_{A_1,A_2,\mu} \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(S_{A_1}, S_{A_2})$ où :

$$I_{A_1,A_2,\mu} f : h \longmapsto \int_{A_1 \cap A_2 \backslash A_2} f((a,0)h) d\mu(a).$$

3 Représentation de Weil modulaire

3.1 Groupe métaplectique et représentation de Weil modulaires

Soient $\psi \in \hat{F}_R$ un caractère non trivial et $(\rho_\psi, S) \in \mathrm{Rep}_R(H)$ un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ (cf. Section 2.2). Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ agit sur le groupe d'Heisenberg H via :

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \to & H \\ (g,(w,t)) & \mapsto & g \cdot (w,t) = (gw,t) \end{array}.$$

Cette action fixe le centre de H et préserve donc la représentation métaplectique. Pour $g \in \mathrm{Sp}(W)$, on note $\rho_\psi^g : h \mapsto \rho_\psi(g^{-1} \cdot h)$. Alors $(\rho_\psi^g, S) \in \mathrm{Rep}_R(H)$ est un autre modèle de la représentation métaplectique associée à ψ. Par conséquent, le Théorème 2.1 affirme que les représentations ρ_ψ et ρ_ψ^g sont isomorphes. Il existe donc $M_g \in \mathrm{GL}_R(S)$, unique à scalaire près d'après le point b) la Proposition 2.4, tel que pour tout $h \in H$:

$$M_g \rho_\psi(h) M_g^{-1} = \rho_\psi^g(h).$$

Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$, on suppose un tel M_g fixé. On obtient ainsi une représentation projective du groupe symplectique qui ne dépend pas du choix des M_g précédents :

$$g \in \mathrm{Sp}(W) \mapsto \textsc{red}(M_g) \in \mathrm{PGL}_R(S).$$

On la note σ_S. Un argument classique consiste à relever cette représentation projective en une vraie représentation d'une extension centrale du groupe symplectique. En effet, on considère :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \arrow[r, "\omega_{\psi,S}"] \arrow[d, "p_S"] & \mathrm{GL}_R(S) \arrow[d, "\textsc{red}"] \\ \mathrm{Sp}(W) \arrow[r, "\sigma_S"] & \mathrm{PGL}_R(S) \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) = \mathrm{Sp}(W) \times_{\mathrm{PGL}_R(S)} \mathrm{GL}_R(S)$ est le produit fibré dans le catégorie des groupes de σ_S et de $\textsc{red}$ au-dessus de $\mathrm{PGL}_R(S)$. Les morphismes de groupes p_S et $\omega_{\psi,S}$ désignent respectivement la première et la seconde projection.

Définition 3.1. On donne à la représentation $(\omega_{\psi,S}, S)$ le nom de *représentation de Weil modulaire sur W associée à ψ et S.*

Proposition 3.2. *Le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ est une extension centrale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $R^\times$ et s'inscrit dans la suite exacte :*

$$1 \to R^\times \overset{i_S}{\to} \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \overset{p_S}{\to} \mathrm{Sp}(W) \to 1$$

où $i_S : \lambda \mapsto (\mathrm{Id}_W, \lambda \cdot \mathrm{Id}_S)$. Pour deux modèles S et S' de ρ_ψ, et pour tout isomorphisme de représentations $\phi : S \to S'$, l'isomorphisme d'extension centrale :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) & \to & \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S'}(W) \\ (g,M) & \mapsto & (g, \phi M \phi^{-1}) \end{array}$$

ne dépend pas du choix de ϕ. On le note $\Phi_{S,S'}$. Sauf dans le cas $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F W = 2$, il existe un unique isomorphisme d'extension centrale entre $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ et $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S'}(W)$, et celui-ci est donné par $\Phi_{S,S'}$.

Démonstration. Le noyau de p_S est donné par la flèche i_S, d'où la suite exacte en question. Ensuite, d'après le point b) de la Proposition 2.4, l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{R[H]}(S, S')$ est de dimension 1 sur R. Donc tout morphisme non nul est un isomorphisme de représentations et l'application $M \mapsto \phi M \phi^{-1}$ ne dépend pas du choix du morphisme non nul $\phi \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(S, S')$. On appelle $\Phi_{S,S'}$ le morphisme de groupes $(g, M) \mapsto (g, \phi M \phi^{-1})$, qui est bien un isomorphisme d'extensions centrales *i.e.* un isomorphisme de groupes tel que $p_{S'} \circ \Phi_{S,S'} = p_S$ et $\Phi_{S,S'} \circ i_S = i_{S'}$.

Pour terminer, le groupe symplectique est parfait *i.e.* égale à son groupe dérivé, sauf dans le cas exceptionnel où $\mathrm{Sp}(W) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. Or, deux isomorphismes d'extensions centrales différent par un caractère $\chi : \mathrm{Sp}(W) \to R^\times$. Si l'on exclut le cas exceptionnel, ce caractère est forcément trivial et $\Phi_{S,S'}$ est l'unique isomorphisme d'extensions centrales en question. □

En d'autres termes, la classe d'isomorphisme de l'extension centrale $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ ne dépend pas du choix du S et il existe des identifications canoniques données par les isomorphismes d'extensions centrales $\Phi_{S,S'}$.

Définition 3.3. On appelle *groupe métaplectique modulaire sur W associé à ψ* la classe d'isomorphisme définie par les extensions centrales précédentes. Par extension, tout élément de cette classe d'isomorphisme est encore désigné comme « groupe métaplectique ».

Dans le cas exceptionnel seulement, il existe d'autres isomorphismes d'extensions centrales. En reprenant les notations du diagramme défini plus haut, les représentations $(\omega_{\psi,S'} \circ \Phi_{S,S'}, S')$ et $(\omega_{\psi,S}, S)$ sont isomorphes.

Théorème 3.4. *On note $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ le groupe dérivé de $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$.*

a) *Si F est fini, ou si la caractéristique ℓ de R est 2, il existe une section de p_S :*

$$\mathrm{Sp}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W).$$

Hormis dans le cas exeptionnel $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F W = 2$ où le groupe symplectique n'est pas parfait, cet homomorphisme est unique. Ce plongement de $\mathrm{Sp}(W)$ *induit un isomorphisme de groupes :*

$$\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \simeq [\mathrm{Sp}(W), \mathrm{Sp}(W)]$$

où $[\mathrm{Sp}(W), \mathrm{Sp}(W)] = \mathrm{Sp}(W)$*, sauf dans le cas exceptionnel.*

b) *Si F est local non archimédien et $\ell \neq 2$, un tel homomorphisme n'existe pas. En revanche, on a une suite exacte :*

$$1 \to \{\pm 1\} \overset{i_S}{\to} \widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \overset{p_S}{\to} \mathrm{Sp}(W) \to 1.$$

Le groupe $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ *est l'unique sous-groupe de* $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ *s'inscrivant dans une telle suite exacte.*

c) *Le groupe* $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ *est un groupe parfait, sauf dans le cas exceptionnel.*

Démonstration. a) Si un tel morphisme σ existe, il induit un isomorphisme d'extension centrale :

$$(g,\lambda) \in \mathrm{Sp}(W) \times R^\times \to \sigma(g) i_S(\lambda) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W).$$

Or, l'ensemble de ces isomorphismes d'extensions centrales est en bijection avec l'ensemble des caractères $\mathrm{Sp}(W) \to R^\times$, qui est trivial sauf dans le cas exceptionnel. De plus, l'identification des groupes dérivés résulte de cet isomorphisme. Le morphisme en question existe bien quand F est fini en vertu de [Ste62, Th. 3.3.] : le groupe symplectique est alors son propre revêtement universel au sens de [Moo68]. Cela signifie que toute extension centrale du groupe symplectique est scindée. On traite le cas F local non archimédien et $\ell = 2$ dans la preuve qui suit.

b) On suppose maintenant que F est local non archimédien. Quand $R = \mathbb{C}$, [Wei64] montre qu'il existe un caractère $A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^\times$ d'une extension centrale $A_{\mathbb{C}}$ de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\mathbb{C}^\times$, dont le noyau est $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$, l'unique extension centrale non triviale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\{\pm 1\}$. À ce titre, ce groupe est parfait. Il est donc le groupe dérivé de $A_{\mathbb{C}}$. Ce résultat a été généralisé [CT13, §5] au cas d'un anneau intègre R de caractéristique ℓ différente de p et pour lequel il existe un caractère non trivial $\psi : F \to R^\times$. Cela constitue précisément les hypothèses qui portent sur le corps R dans cet article. On en déduit qu'il existe un caractère $A_R \to R^\times$ d'une extension centrale A_R de $\mathrm{Sp}(W)$ par $R^\times$ dont le noyau est $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$ quand $\ell \neq 2$ et $\mathrm{Sp}(W)$ quand $\ell = 2$. Ces deux groupes sont parfaits. On renvoie à [Tri19, Ann A.2] pour l'identification entre A_R et le groupe métaplectique.

On obtient donc un caractère $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \to R^\times$ dont le noyau est un groupe parfait, donc égal au groupe dérivé. Quand $\ell = 2$, on applique le même argument que dans le cas fini pour montrer que le morphisme d'inclusion est l'unique morphisme qui scinde la suite exacte de la Proposition 3.2. Quand $\ell \neq 2$, un tel sous-groupe parfait est unique. En effet, le groupe métaplectique ne contient pas le groupe $\mathrm{Sp}(W)$ comme sous-groupe, d'après [CT13, Th. 5.4], donc le sous-groupe en question doit être l'unique extension centrale non triviale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\{\pm 1\}$, qui est un groupe parfait, donc contenu dans le groupe dérivé. Par suite, il est égal au groupe dérivé. $\square$

On munit R de la topologie discrète. Soit S un espace vectoriel sur R. On le munit également de la topologie discrète. La topologie compacte-ouverte sur $\mathrm{GL}_R(S)$ est engendrée par la prébase $S_{s,s'} = \{g \in \mathrm{GL}_R(S) \mid gs = s'\}$ où s et s' parcourent S. Alors, une représentation d'un groupe topologique G est lisse si et seulement si le morphisme $G \to \mathrm{GL}_R(S)$ associé est continu.

Proposition 3.5. *Le groupe métaplectique* $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ *est le produit fibré dans la catégorie des groupes topologiques des morphismes de groupes continus* σ_S *et* RED. *À ce titre, c'est un sous-groupe topologique de* $\mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{GL}_R(S)$ *qui est une extension centrale topologique de* $\mathrm{Sp}(W)$ *par* $R^\times$. *De plus, les isomorphismes* $\Phi_{S,S'}$ *décrits précédemment sont des isomorphismes d'extensions centrales topologiques.*

Démonstration. Dans le cas où F est fini, la topologie en jeu est partout la topologie discrète. Les groupes en question sont donc automatiquement des groupes topologiques. On suppose dorénavant que F est local non archimédien. Tout d'abord, RED est continu par définition de la topologie quotient. Il s'agit ensuite de montrer que σ_S est continue. Il suffit de trouver un seul modèle de la représentation métaplectique pour lequel ce soit vrai. En effet, le morphisme de groupes $\Phi_{S,S'}$ induit un isomorphisme de groupes topologiques :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_R(S) & \to & \mathrm{GL}_R(S') \\ M & \mapsto & \phi M \phi^{-1} \end{array}$$

que l'on note encore $\Phi_{S,S'}$. Celui-ci induit à son tour un isomorphisme de groupes topologiques entre $\mathrm{PGL}_R(S)$ et $\mathrm{PGL}_R(S')$. On en déduit que σ_S est continu si et seulement $\Phi_{S,S'} \circ \sigma_S = \sigma_{S'}$ est continue. La proposition résulte alors de :

Lemme 3.6. *Soit L un réseau auto-dual de W. Soit S_L le modèle latticiel associé à L. Alors σ_{S_L} est continu.*

Démonstration. Soit (ρ_ψ, S_L) le modèle latticiel de la représentation métaplectique défini dans la Section 2.2. Soit K le stabilisateur de L dans $\mathrm{Sp}(W)$. C'est un sous-groupe compact ouvert. Soient $k \in K$ et N_k l'application linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_{L_H}^{H}(\psi_L) & \to & \mathrm{ind}_{L_H}^{H}(\psi_L^k) \\ f & \mapsto & k \cdot f \end{array}$$

où $k \cdot f : h \mapsto f(k^{-1} \cdot h)$ et $\psi_L^k : (l,t) \mapsto \psi_L((k^{-1}l, t))$.

Quand $p \neq 2$, on peut choisir le caractère ψ_L de sorte que $\psi_L((l,t)) = \psi(t)$ d'après la Remarque 2.6. Ainsi, on a $\psi_L^k = \psi_L$ pour tout $k \in K$. Alors $N_k \in \mathrm{GL}_R(S_L)$ vérifie :

$$N_k \circ \rho_\psi = \rho_\psi^{k^{-1}} \circ N_k.$$

On déduit de cette dernière égalité qu'on a $N_k \circ \rho_\psi^k = \rho_\psi \circ N_k$. En d'autres termes, $N : k \in K \mapsto N_k \in \mathrm{GL}_R(S_L)$ est une représentation de K qui relève $\sigma_{S_L}|_K$ au sens où $\sigma_{S_L}(k) = \mathrm{RED}(N_k)$ pour tout $k \in K$. De plus, cette représentation N est lisse. En effet, il suffit d'observer que l'action de $k \in K$ sur $f \in S_L \simeq C_c^\infty(W)$ est donnée par $k.f : w \mapsto f(k^{-1}w)$.

Quand $p = 2$, le caractère ψ_L ne peut pas être étendu « trivialement » à L_H. Il existe en revanche un entier positif n de sorte que $\varpi^n L \times \mathrm{Ker}(\psi)$ soit un sous-groupe de $\mathrm{Ker}(\psi_L)$. On fixe un tel n. Soit K_n le noyau du morphisme de réduction $K \to \mathrm{GL}(L/\varpi^n L)$. Alors par les mêmes arguments que précédemment, l'application linéaire N_k est dans $\mathrm{GL}_R(S_L)$ pour tout $k \in K_n$. La représentation $k \in K_n \mapsto N_k \in \mathrm{GL}_R(S)$ est lisse et relève $\sigma_{S_L}|_{K_n}$.

Par conséquent, on a montré qu'il existe un sous-groupe compact ouvert K de $\mathrm{Sp}(W)$ et une représentation lisse de K notée σ tels que $\sigma_{S_L}(k) = \mathrm{RED}(\sigma(k))$. L'application σ_{S_L} est donc continue au voisinage de $1_{\mathrm{Sp}(W)}$ puisque σ et RED le sont, on en déduit que σ_{S_L} est continu partout puisque c'est un morphisme de groupes. □

On peut donc former le produit fibré $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ de σ_S et RED au-dessus de $\mathrm{PGL}_R(S)$ dans la catégorie des groupes topologiques. Par définition, il est un sous-groupe topologique du groupe topologique $\mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{GL}_R(S)$ qui est muni de la topologie produit. Enfin, l'isomorphisme d'extension centrale $\Phi_{S,S'}$ est bicontinu d'après la discussion qui précède le lemme. □

En particulier, le morphisme de groupes $\omega_{\psi,S} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \to \mathrm{GL}_R(S)$ est continu en tant que seconde projection du produit fibré. Comme déjà mentionné, ce dernier point est équivalent à :

Corollaire 3.7. *La représentation de Weil modulaire* $(\omega_{\psi,S}, S)$ *est lisse.*

La première projection p_S est également continue et fournit une structure plus riche :

Proposition 3.8. *La projection* $p_S : \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ *munit le groupe métaplectique d'une structure de revêtement topologique de base* $\mathrm{Sp}(W)$ *et de fibre* $R^\times$*. De plus, il existe des sections globales de* p_S*.*

Démonstration. Tout d'abord, la première assertion implique la seconde. En effet, si p_S définit un revêtement topologique, alors p_S admet des sections locales par définition. On va construire une section globale en exploitant le fait que la topologie sur $\mathrm{Sp}(W)$ est totalement discontinue. Par hypothèse, il existe un sous-groupe ouvert U de $\mathrm{Sp}(W)$ et une section locale σ de p_S définie sur U de sorte que l'application :

$$(g, \lambda) \in U \times R^\times \mapsto \sigma(g)\lambda \in p_S^{-1}(U)$$

soit un homéomorphisme. On considère le quotient $\mathrm{Sp}(W)/U$ qui est un ensemble discret. On se dote d'un système de représentants des classes à gauche modulo U *i.e.* d'une application $h : \mathrm{Sp}(W)/U \to \mathrm{Sp}(W)$ telle que $h(i)U = i$. L'image $h(\mathrm{Sp}(W)/U)$ de h est un sous-ensemble discret de $\mathrm{Sp}(W)$. Alors, pour toute section A de p_S sur le sous-ensemble discret $h(\mathrm{Sp}(W)/U)$, *i.e.* telle que $p_S(A_{h(i)}) = h(i)$ pour tout $h(i) \in h(\mathrm{Sp}(W)/U)$, l'application suivante est une section globale de p_S :

$$g \in \mathrm{Sp}(W) \mapsto A_{h(gU)} \times \sigma(h(gU)^{-1}g) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W).$$

Maintenant, il reste à montrer la première partie de l'énoncé, à savoir que p_S admet des sections locales. Cela suffit car les fibres de p_S sont bien isomorphes à $R^\times$ muni de la topologie discrète. Comme p_S est un morphisme de groupes, on peut seulement concentrer ses efforts au voisinage de $1_{\mathrm{Sp}(W)}$. Or, dans la preuve du Lemme 3.6, on a montré qu'il existait un sous-groupe ouvert K de $\mathrm{Sp}(W)$ et une représentation lisse $\sigma : K \to \mathrm{GL}_R(S_L)$ de sorte que $\sigma_{S_L}(k) = \mathrm{RED}(\sigma(k))$. L'application suivante est alors un homéomorphisme de groupes :

$$(k, \lambda) \in K \times R^\times \mapsto (k, \lambda\sigma(k)) \in p_{S_L}^{-1}(K).$$

Donc $k \mapsto (k, \sigma(k))$ est une section locale de p_{S_L}.

Enfin, comme les applications $\Phi_{S_L,S}$ sont des isomorphismes d'extensions centrales topologiques, on récupère le résultat pour tout modèle S de la représentation métaplectique. □

Remarque 3.9. En particulier, toute section globale σ de p_S définit un isomorphisme d'extensions centrales topologiques :

$$(g,\lambda) \in \mathrm{Sp}(W) \times_c R^\times \mapsto \sigma(g)(1_{\mathrm{Sp}(W)}, \lambda \mathrm{Id}_S) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$$

le groupe de gauche étant muni de la topologie produit et sa loi donnée par le 2-cocyle :

$$c(g,g') = i_S^{-1}(\sigma(g)\sigma(g')\sigma(gg')^{-1}).$$

De plus, l'application $(g,g') \in G \times G \mapsto c(g,g') \in R^\times$ est localement constante car continue.

Corollaire 3.10.

a) *Le groupe métaplectique* $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ *est un groupe localement profini.*

b) *Le groupe* $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ *est un sous-groupe ouvert de* $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$.

Démonstration. Il ne s'agit de prouver ces énoncés que quand F est local non archimédien puisque, quand F est fini, la topologie n'intervient pas.

a) Dans la preuve de la Proposition 3.8, les homéomorphismes de groupes :

$$(k,\lambda) \in K \times R^\times \mapsto (k, \lambda\sigma(k)) \in p_S^{-1}(K)$$

fournissent une base de voisinages de $(1_{\mathrm{Sp}(W)}, \mathrm{Id}_S)$ dans le groupe métaplectique constituée d'ouverts compacts. Par conséquent, le groupe métaplectique est un groupe localement profini.

b) On montrera lors de la Proposition 3.17 qu'il existe un sous-groupe ouvert de K dont l'image par l'homéomorphisme précédent :

$$k \mapsto (k, \sigma(k))$$

est contenue dans $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$. Ce sous-groupe contenant un ouvert, il est donc bien ouvert. Cet argument montre même que ce groupe possède une structure de revêtement topologique de base $\mathrm{Sp}(W)$ et de fibre $\{\pm 1\}$ quand $\ell \neq 2$. □

3.2 Modèles de la représentation de Weil modulaire

3.2.1 Décalque des représentations S_A

On note $(\rho_d, \mathrm{Ind}_F^H(\psi))$ la représentation où H agit par translation à droite. Pour tout sous-groupe auto-dual A de W, on peut voir le modèle $(\rho_\psi, S_A) = (\rho_\psi, \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A))$ de la représentation métaplectique comme contenu canoniquement dans ρ_d.

L'action d'un élément $g \in \mathrm{Sp}(W)$ sur H donne un isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} I_g : & \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A) & \to & \mathrm{ind}_{gA_H}^H(\psi_A^g) \\ & f & \mapsto & g \cdot f \end{array}$$

où $g \cdot f : h \mapsto f(g^{-1} \cdot h)$ et $\psi_A^g : a \in gA_H \mapsto \psi_A(g^{-1} \cdot h) \in R^\times$. Alors, pour tout $h \in H$:

$$I_g \circ \rho_d(h) = \rho_d(g^{-1} \cdot h) \circ I_g.$$

En composant avec les morphismes d'entrelacement $I_{gA,A,\mu,\omega}$ de la Proposition 2.5, on obtient :

$$S_A \xrightarrow{I_g} S_{gA} \overset{I_{gA,A,\mu,\omega}}{\longrightarrow} S_A,$$

qui vérifie :

$$I_{gA,A,\mu,\omega} \circ I_g \circ \rho_d(h) = \rho_d(g^{-1} \cdot h) \circ I_{gA,A,\mu,\omega} \circ I_g.$$

Ainsi :

$$(g, I_{gA,A,\mu,\omega} \circ I_g) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_A}(W).$$

En particulier, comme pour tout $g \in \mathrm{Stab}(A) \cap \mathrm{Stab}(\psi_A)$ l'opérateur $I_{gA,A,\mu,\omega}$ est un multiple de l'identité, l'application :

$$g \in \mathrm{Stab}(A) \cap \mathrm{Stab}(\psi_A) \mapsto (g, I_g) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_A}(W)$$

est un morphisme de groupes.

Modèle de Schrödinger. Soit X un lagrangien de W. On considère S_X le modèle de Schödinger sur X de la représentation métaplectique associé à ψ. On rappelle que dans les modèles de Schrödinger, le caractère ψ_X est trivial sur X *i.e.* $\psi_X((x,t)) = \psi(t)$ pour tout $x \in X$ et $t \in F$. Alors, en notant $P(X)$ le parabolique de $\mathrm{Sp}(W)$ qui stabilise le sous-espace X et le caractère ψ_X, on a d'après la remarque précédente un morphisme de groupes :

$$p \in P(X) \mapsto (p, I_p) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W).$$

En choisissant une polarisation complète $W = X + Y$, on identifie S_X avec $C_c^\infty(Y)$ via la restriction des fonctions à Y. Alors, en notant $p = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{bmatrix} \in P(X)$:

$$I_p f : (y, 0) \mapsto \psi(\frac{1}{2}\langle a^* y, b^* y\rangle) f((a^* y, 0)).$$

En particulier, cela donne des plongements du Levi $M(X)$ et du radical unipotent $N(X)$ dans le groupe métaplectique. Avant de décrire l'image de ce plongement, on remarque que pour un élément $g = \begin{bmatrix} 0 & c \\ (c^*)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(W)$, on a d'après la Remarque 2.6 :

$$(g, I_{Y,X,\mu_X} \circ I_g) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W)$$

où I_{Y,X,μ_X} est simplement la transformée de Fourier. Un calcul donne :

$$I_{Y,X,\mu_X} \circ I_g f : (y, 0) \mapsto \int_X \psi(\langle x, y\rangle) f(c^{-1} x) d\mu_X(x).$$

Remarque 3.11. Ces formules fournissent des compatibilités à l'extension et à la réduction des scalaires. On développe maintenant ces deux points.

- Soit R' une extension de corps de R. Alors $S_X^{R'} = S_X \otimes_R R'$ est un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ et à coefficients dans R'. On a alors une inclusion évidente $i_{R'}$ induite par celle de S_X dans $S_X^{R'}$:

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W) \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}^{R'}_{\psi,S_X \otimes_R R'}(W)$$

compatible aux applications de projection. On écrit par abus de notation :

$$\omega_{\psi,S_X^{R'}} = \omega_{\psi,S_X} \otimes_R R'.$$

- Soit maintenant $\mathcal{A}$ un anneau local de corps des fractions R et de corps résiduel k de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$. Soit $S_X^{\mathcal{A}}$ le sous-espace de S_X qui s'identifie à $C_c^\infty(Y, \mathcal{A})$ dans $C_c^\infty(Y)$. D'après les formules précédentes, c'est un $\mathcal{A}$-module qui est stable par l'action du groupe métaplectique réduit. On note cette représentation :

$$(\omega^{\mathcal{A}}_{\psi,S_X}, S_X^{\mathcal{A}}) \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{A}}(\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W))$$

car l'action est la restriction de celle de ω_{ψ,S_X}. Si ψ est à valeurs dans $\mathcal{A}$, alors sa réduction ψ_k est bien défini et est un caractère non trivial à valeurs dans k. Cette situation est toujours réalisable quand $\mathcal{A}$ est un anneau de valuation par exemple. Soit S_X^k le modèle de la représentation métaplectique associé à ψ_k et X à valeurs dans k. Alors on a :

$$S_X^{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} k = S_X^k$$

en tant que représentation du groupe d'Heisenberg. Cela induit un morphisme :

$$i_k : \widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W) \to \widehat{\mathrm{Sp}}^k_{\psi_k,S_X^k}(W)$$

qui est surjectif et compatible aux projections. On écrit par abus de notation :

$$\omega^{\mathcal{A}}_{\psi,S_X} \otimes_{\mathcal{A}} k = \omega_{\psi_k,S_X^k}.$$

Modèle de Schrödinger "mixte". Soit X un sous-espace totalement isotrope non nul et non maximal de W. Soit Y un sous-espace totalement isotrope de W dual de X de sorte que $W = X + W^0 + Y$, où W^0 est le sous-espace symplectique orthogonal, dans W, au sous-espace symplectique $X + Y$. Soit (ρ_ψ^0, S^0) un modèle de la représentation métaplectique de $H(W^0, \langle,\rangle)$ associé à ψ. On réalise la représentation métaplectique de $H(X+Y, \langle,\rangle)$ à travers le modèle de Schrödinger $C_c^\infty(Y)$ associé à X et ψ. Alors, d'après le point d) de la Proposition 2.4, la représentation $S = C_c^\infty(Y) \otimes S^0$ est un modèle de la représentation métaplectique de $H(W, \langle,\rangle)$ associé à ψ. On note $P(X)$ le parabolique de $\mathrm{Sp}(W)$ qui stabilise le sous-espace X et $j : P(X) \to \mathrm{Sp}(W^0)$ la projection naturelle sur la partie symplectique du Levi $M(X)$ de $P(X)$. Cette dernière possède une section naturelle donnée par l'inclusion de $\mathrm{Sp}(W^0)$ dans $M(X)$. Par abus de notation $p \in P(X) \mapsto (pu^{-1}, u) \in \mathrm{Ker}(j) \rtimes \mathrm{Sp}(W^0)$ est un isomorphisme de groupes. On vérifie sans difficulté :

Lemme 3.12. *On a un isomorphisme de groupes :*

$$\begin{array}{ccc} P(X) \times_{\mathrm{Sp}(W^0)} \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S^0}(W^0) & \tilde{\to} & p_S^{-1}(P(X)) \\ (p,\tilde{u}) & \mapsto & (p, I_{pu^{-1}} \otimes \omega_{\psi,S^0}(\tilde{u})) \end{array}$$

où le produit fibré de gauche est donné par j et p_{S^0}.

En particulier, on peut considérer l'action de $\mathrm{Ker}(j)$ via le morphisme de groupes :

$$p \in \mathrm{Ker} j \mapsto (p, I_p \otimes \mathrm{Id}_{S^0}) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W).$$

On donne maintenant les actions de sous-groupes remarquables – même si le dernier n'en est pas un ! – pour $f \in C_c^\infty(Y) \otimes S^0 = C_c^\infty(Y, S^0)$:

- pour tout $p = (a,u) \in M(X) = \mathrm{GL}(X) \times \mathrm{Sp}(W^0)$, on a :

$$(p,\tilde{u}) \cdot f : y \mapsto \omega_{\psi,S^0}(\tilde{u}) \cdot (f(a^* y)) \ ;$$

- pour tout $p = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_X & 0 & s \\ 0 & \mathrm{Id}_{W^0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_Y \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(W)$, on a :

$$(p, (1_{\mathrm{Sp}(W)}, \mathrm{Id}_{S^0})) \cdot f : y \mapsto \psi(\frac{1}{2}\langle sy, y\rangle) f(y) \ ;$$

- pour tout $p = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_X & v & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{W^0} & -v^* \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_Y \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(W)$, on a :

$$(p, (1_{\mathrm{Sp}(W)}, \mathrm{Id}_{S^0})) \cdot f : y \mapsto \rho_\psi^0((v^* y, 0)) \cdot (f(y)).$$

Modèle latticiel. Soit F local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2. Soit A un réseau autodual de W. L'hypothèse sur F permet d'étendre le caractère ψ trivialement à A d'après la Remarque 2.6 *i.e.* de choisir $\omega = 0$. Pour $g \in \mathrm{Sp}(W)$, $A/gA \cap A$ est fini. On le munit de la mesure de comptage μ. Un calcul explicite donne :

$$I_{gA,A,\mu} \circ I_g f : (w,0) \mapsto \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi(\frac{1}{2}\langle a, w\rangle) f((g^{-1}(a+w), 0)).$$

Ainsi, en notant K le stabilisateur de A dans $\mathrm{Sp}(W)$, on a un morphisme de groupes :

$$k \in K \mapsto (k, I_k) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W)$$

qui définit une représentation lisse $k \in K \mapsto \omega_{\psi,S_A}((k,I_k)) = I_k \in \mathrm{GL}_R(S_A)$.

Remarque 3.13. Le modèle latticiel existe en caractéristique résiduelle 2. Seulement, le fait que le caractère ψ_A ne soit plus trivial sur A amène à des formules qui ne sont guère exploitables. On les donne à titre de remarque. Soit A un réseau auto-dual de W et ψ_A un caractère qui étend ψ à $A \times F$. Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$, on munit systématiquement $A/gA \cap A$ de la mesure de comptage. Pour tout k dans K, on a :

$$I_{kA,A,\mu,\omega_k} \circ I_k f : (w,0) \mapsto f((k^{-1}\omega_k, 0)(k^{-1}w,0)) = \psi(\frac{1}{2}\langle \omega_k, w\rangle) f((k^{-1}(\omega_k + w), 0))$$

où ω_k est pris comme dans la Proposition 2.5, et peut être choisi nul si k appartient au sous-groupe ouvert compact $K \cap \mathrm{Stab}(\psi_A) = \{k \in K \mid \psi_A^k = \psi_A\}$. Pour $g \in \mathrm{Sp}(W)$, en choisissant ω_g comme dans la Proposition 2.5, la fonction $I_{gA,A,\mu,\omega_g} \circ I_g f$ est :

$$(w,0) \mapsto \sum_{a \in A/gA\cap A} \psi_A((a,0))^{-1} \psi(\frac{1}{2}\langle \omega_g, a\rangle) \times \psi(\frac{1}{2}\langle \omega_g + a, w\rangle) f((g^{-1}(\omega_g + a + w), 0)).$$

3.2.2 Un autre modèle

Soit (ρ_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique de H. Soit $g \in \mathrm{Sp}(W)$. Fixons une mesure de Haar μ_g sur l'espace vectoriel $W/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$. On vérifie que pour tout $s \in S$, la fonction :

$$w \in W \mapsto \psi(\frac{\langle w, g^{-1}w\rangle}{2}) \rho_\psi((\mathrm{Id}_W - g^{-1})w, 0)s \in S$$

est constante sur les classes modulo $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$.

Lemme 3.14. *Soient $g \in \mathrm{Sp}(W)$ et μ_g une mesure de Haar de $W/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$.*

- *si F est fini on définit $M[g] \in \mathrm{End}_R(S)$ par :*

$$M[g] : s \mapsto \int_{W/\mathrm{Ker}(1-g^{-1})} \psi(\frac{\langle w, g^{-1}w\rangle}{2}) \rho_\psi((\mathrm{Id}_W - g^{-1})w, 0)) s \, d\mu_g(w);$$

- *si F est local non archimédien, pour tout réseau L de $W/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$ on définit l'application :*

$$M_L[g] : s \mapsto \int_L \psi(\frac{\langle w, g^{-1}w\rangle}{2}) \rho_\psi((\mathrm{Id}_W - g^{-1})w, 0)) s \, d\mu_g w$$

Pour tout $s \in S$, l'élément $M_L[g]s$ ne dépend pas de L au sens suivant : il existe un réseau $L_s \subset W/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$, et un élément noté $M[g]s \in S$ tels que si L est un réseau de $W/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$, si $L_s \subset L$, on a l'égalité $M_L[g]s = M[g]s$. L'application ainsi définie $M[g] : s \mapsto M[g]s$ appartient à $\mathrm{End}_R(S)$.

Alors $M[g] \in \mathrm{Hom}_H(\rho_\psi, \rho_\psi^g)$ i.e. $(g, M[g]) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$.

Démonstration. On commence par une remarque d'ordre plus générale pour comprendre d'où viennent ces formules. Soit G un groupe localement profini. Soient (π, V) et (π', V) deux représentations lisses de G sur le même R-espace vectoriel V. Soit H un sous-groupe compact. On le suppose de pro-ordre inversible dans R – ou contenant un sous-groupe ouvert dont le pro-ordre est inversible – et on choisit une mesure μ_H de H dans R. Alors l'endomorphisme :

$$f : v \in V \mapsto \int_H \pi'(k)^{-1}\pi(k)v \ d\mu_K(k) \in V$$

est dans $\mathrm{Hom}_H(\pi, \pi')$.

On prend dorénavant $G = W/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$, $H = L$, $V = S$, $\pi = \rho_\psi$ et $\pi' = \rho_\psi^g$. Comme cela a été dit plus haut, la fonction :

$$w \in W \mapsto \rho_\psi^g((w,0))^{-1}\rho_\psi((w,0))s = \psi(\frac{\langle w, g^{-1}w\rangle}{2})\rho_\psi(((\mathrm{Id}_W - g^{-1})w, 0))s \in S$$

est bi-invariante par $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1})$, ce qui permet de la considérer comme un élément de $C^\infty(W/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_W - g^{-1}), S)$. Alors en l'intégrant sur le compact L, qu'on peut prendre égal à W dans le cas fini, on obtient que $M_L[g] \in \mathrm{Hom}_L(\rho_\psi, \rho_\psi^g)$. Pour montrer l'existence du réseau L_s, la preuve est identique à celle de [MVW87, Chap.2, Lem. II.2]. Ensuite, $M[g]$ est un endomorphisme de S et $M_L[g]s$ ne dépend pas de L, donc $M[g] \in \mathrm{Hom}_H(\rho_\psi, \rho_\psi^g)$ puisque H est réunion de ses sous-groupes compacts et $M_L \in \mathrm{Hom}_L(\rho_\psi, \rho_\psi^g)$. Comme $M[g]$ est non nul, il est inversible car les représentations ρ_ψ et ρ_ψ^g sont irréductibles. On a bien $(g, M[g])$ qui appartient au groupe métaplectique. □

Lemme 3.15. *Soient $g_1, g_2 \in \mathrm{Sp}(W)$. Supposons que $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Alors :*

$$M[g_1]M[g_2] = M[g_2]M[g_1].$$

Démonstration. On renvoie à la preuve de [MVW87, Chap. 2, Lem. II.5], qui a pour seul point délicat un changement de variables $w = g_1^{-1}w'$ dont le jacobien est le module d'une mesure de Haar et vaut :

$$|\det(g_1^{-1}|_{W/\mathrm{Ker}(1-g_2)})| = |\det(g_1|_W)|^{-1}|\det(g_1|_{\mathrm{Ker}(1-g_2)})|.$$

Ce sont des puissances de p, donc des quantités bien définies dans R. Le premier terme de droite vaut 1 car $g_1 \in \mathrm{Sp}(W)$. Un argument de [SS74, IV.2.] donne une description explicite du commutant de g_2, et le second terme de droite vaut alors 1 lui aussi. □

3.3 Sous-groupes scindés

Soient X un lagrangien de W. Soit S_X le modèle de la représentation métaplectique associé. Les formules du modèle de Schrödinger donnent facilement :

Proposition 3.16. *Pour tout sous-groupe H de $P(X)$, l'isomorphisme :*

$$p_{S_X}^{-1}(P(X)) \simeq P(X) \times R^\times$$

se restreint en un isomorphisme d'extensions centrales :

$$p_{S_X}^{-1}(H) \simeq H \times R^\times.$$

De plus, en exploitant les formules du modèle latticiel :

Proposition 3.17. *On suppose que F est local non archimédien. Soit A un réseau auto-dual de W. Par convention, la restriction de ψ_A à A est triviale si la caractéristique résiduelle n'est pas 2. Le plongement naturel du sous-groupe ouvert compact $K = \mathrm{Stab}(A) \cap \mathrm{Stab}(\psi_A)$ de $\mathrm{Sp}(W)$:*

$$k \in K \mapsto (k, I_k) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_A}(W)$$

est à valeurs dans $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_A}(W)$.

Démonstration. Comme dans [MVW87, Chap. 2, Lem. II.10], on commence par la remarque suivante : si le corps résiduel de F n'est pas de caractéristique 2 et a au moins 4 éléments, alors le groupe K est parfait puisqu'il est égal à $\mathrm{Stab}(A)$. Pour une preuve générale, on va montrer que pour toute polarisation complète $W = X + Y$ telle que $A = A \cap X + A \cap Y$, la restriction du plongement de l'énoncé à $N(X) \cap K$ coïncide avec la restriction du plongement canonique de $N(X)$ normalisé par $P(X)$ de la proposition précédente. En effet, si $W = X + Y$ est une polarisation complète, un calcul simple donne pour tout $f \in S_X \simeq C_c^\infty(Y)$ et tout $k = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_X & s \\ 0 & \mathrm{Id}_Y \end{bmatrix} \in K \cap N(X)$:

$$\Phi_{S_A,S_X} \circ I_k f = k \cdot f$$

où $\Phi_{S_A,S_X} : \mathrm{GL}_R(S_A) \to \mathrm{GL}_R(S_X)$ est l'isomorphisme canonique défini dans la Proposition 3.2. En d'autres termes :

$$\Phi_{S_A,S_X} \circ I_k f : y \mapsto \psi(\frac{1}{2}\langle sy, y \rangle) f(y)$$

donc $(k, \Phi_{S_A,S_X} \circ I_k) \in \widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W)$ d'après la proposition précédente. Par suite, on a $(k, I_k) \in \widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_A}(W)$ pour tout $k \in K \cap N(X)$. On peut procéder de même pour $N(Y)$. Or $K \cap N(X)$ et $K \cap N(Y)$ engendrent K, donc $(k, I_k) \in \widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_A}(W)$ pour tout $k \in K$. $\square$

3.4 Propriétés de la représentation de Weil

Soient $\mathrm{Mp}(W)$ le groupe métaplectique sur W associé à ψ (Définition 3.3) et S un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ. D'après le Théorème 3.4, il existe un isomorphisme d'extensions centrales φ_S, unique sauf dans le cas exceptionnel, entre $\mathrm{Mp}(W)$ et $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$. Pour tout autre modèle S', on fixe des isomorphismes entre $\mathrm{Mp}(W)$ et $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S'}(W)$ en posant $\varphi_{S'} = \Phi_{S,S'} \circ \varphi_S$ en reprenant les notations de la Proposition 3.2.

Définition 3.18. Les représentations $(\omega_{\psi,S}\circ\varphi_S, S)$ et $(\omega_{\psi,S'}\circ\varphi_{S'}, S')$ de $\mathrm{Rep}_R(\mathrm{Mp}(W))$ sont isomorphes. On appelle *représentation de Weil modulaire sur W associée à ψ* la classe d'isomorphisme définie par les représentations précédentes. Par extension, on désigne encore tout élément de cette classe d'isomorphisme comme « représentation de Weil ». En général, on emploie la notation $\omega_{\psi,W}^R$.

Remarque 3.19. Il persiste donc une ambigüité dans le cas exceptionnel où le choix de φ_S est déterminant.

Soit donc $\omega_{\psi,W}^R$ la représentation de Weil modulaire sur W associée à ψ.

Proposition 3.20. *La représentation $\omega_{\psi,W}^R$ est lisse et admissible.*

Démonstration. La lissité provient du Corollaire 3.7. En ce qui concerne l'admissibilité, il suffit de le prouver en prenant comme modèle explicite de la représentation de Weil son modèle latticiel quand F est local non archimédien. On choisit alors un réseau autodual A dans W. Par définition, $S_A = \mathrm{ind}_{A\times F}^{W\times F}(\psi_A)$ où ψ_A étend ψ à $A\times F$. Soit K' un sous-groupe compact ouvert inclus dans le stabilisateur de A. Pour tout $f\in(S_A)^{K'}$, soit L un réseau de W tel que :

- f soit bi-invariante sous L *i.e.* $f((l+w,0)) = f((w,0))$ pour tout $l\in L$ et $w\in W$;
- pour tout $k\in K'$ et tout $l\in L$, on a $\psi_A((k^{-1}l,0)) = 1$.

On peut supposer que $L\subset A$ quitte à choisir le réseau $L\cap A$. On a alors pour tout $l\in L$, pour tout $k\in K'$ et tout $w\in W$:

$$\begin{aligned} f((w,0)) = f((w+l,0)) = f(k^{-1}(l+w,0)) &= f((k^{-1}l,\frac{1}{2}\langle k^{-1}w,k^{-1}l\rangle)(k^{-1}w,0)) \\ &= \psi_A((k^{-1}l,0))\psi(\frac{1}{2}\langle w,l\rangle)f(k^{-1}(w,0)) \\ &= \psi(\frac{1}{2}\langle w,l\rangle)f((w,0)). \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{supp}(f)$ est inclus dans $2L^\perp$ où $L^\perp$ est défini avant le Lemme 2.2. Donc $(S_A)^{K'}$ est donc au plus de dimension $|(A\times F)\backslash(2L^\perp\times F)/K'|$. □

Soit $\widehat{\mathrm{Mp}}(W)$ le groupe dérivé de $\mathrm{Mp}(W)$. Soit Z le centre de $\mathrm{Mp}(W)$. On note $Z' = \{z\in Z \mid z^2 = 1\}$. Le morphisme quotient induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Mp}(W)/\widehat{\mathrm{Mp}}(W) \simeq Z/Z' = R^\times/\{\pm 1\}.$$

Soit $\chi\in\mathrm{Rep}_R(Z)$ le caractère central de $\omega_{\psi,W}^R$ à Z. On considère χ^2 comme un caractère de $\mathrm{Mp}(W)$ grâce à l'isomorphisme précédent puisque $\ker(\chi^2)$ contient Z'.

On déduit facilement du point a) de la Proposition 2.4 :

Proposition 3.21. *La contragrédiente de $\omega_{\psi,W}^R$ est isomorphe à $\omega_{\psi^{-1},W}^R\otimes\chi^2$ dans $\mathrm{Rep}_R(\mathrm{Mp}(W))$. En particulier, la restriction au sous-groupe dérivé induit un isomorphisme de représentations :*

$$\omega_{\psi,W}^R \simeq \omega_{\psi^{-1},W}^R \text{ dans } \mathrm{Rep}_R(\widehat{\mathrm{Mp}}(W)).$$

De même, en examinant le point d) de la Proposition 2.4 :

Proposition 3.22. *Si $W = W_1 \oplus W_2$ est une somme orthogonale, il existe un unique (resp. canonique, dans le cas exceptionnel) morphisme de groupes :*

$$i_{W_1,W_2} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_1}(W_1) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_2}(W_2) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$$

qui relève le plongement $\mathrm{Sp}(W_1) \times \mathrm{Sp}(W_2) \to \mathrm{Sp}(W)$ et commute aux projections. Son noyau est $\{((1_{\mathrm{Sp}(W_1)}, \lambda \mathrm{Id}_{S_2}), (1_{\mathrm{Sp}(W_2)}, \lambda^{-1}\mathrm{Id}_{S_2})) \mid \lambda \in R^\times\}$ qui est isomorphe à $R^\times$ plongé « anti-diagonalement ». On obtient donc que la représentation :

$$\omega^R_{\psi,W} \circ i_{W_1,W_2} \in \mathrm{Rep}_R(\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_1}(W_1) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_2}(W_2))$$

est dans la classe d'isomorphisme de $\omega^R_{\psi,W_1} \otimes \omega^R_{\psi,W_2}$.

3.5 Expression du cocycle métaplectique

Les notations qui suivent sont reprises de [RR93] et [Kud94]. On choisit une polarisation complète $W = X + Y$ de W et l'on fixe une base $\{e_1, \dots e_m\}$ de X. Cela détermine alors une unique base $\{f_1, \dots, f_m\}$ de Y dite « duale » *i.e.* telle que pour tout i et j dans $[\![1, m]\!]$, on ait $\langle e_i, f_j\rangle = \delta_{i,j}$. Pour tout $S \subset [\![1, m]\!]$, on note X_S le sous-espace engendré par la famille $(e_i)_{i\in S}$ qui admet $X_{^cS}$ comme supplémentaire dans X, où ^cS est le complémentaire de S dans $[\![1, m]\!]$. On adopte des notations similaires pour Y. Alors $W_S = X_S + Y_S$ est un sous-espace symplectique de W de supplémentaire orthogonal $W_{^cS}$. On note $w_S \in \mathrm{Sp}(W)$ l'endomorphisme défini par :

$$w_S(e_i) = \begin{cases} f_i & \text{si } i \in S \\ e_i & \text{si } i \notin S \end{cases} \text{ et } w_S(f_i) = \begin{cases} -e_i & \text{si } i \in S \\ f_i & \text{si } i \notin S \end{cases}.$$

De plus, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$, on pose $w_j = w_{[\![1,j]\!]}$ et $\Omega_j = P(X)w_jP(X)$. Avec ces notations, la décomposition de Bruhat s'écrit :

$$\mathrm{Sp}(W) = \coprod_j \Omega_j.$$

Soit $g \in \Omega_j$. Soient p_1 et p_2 dans $P(X)$ tels que $g = p_1 w_j p_2$. On note ϕ_1 l'isomorphisme entre $gX \cap X\backslash X$ et $w_jX \cap X\backslash X$ induit par :

$$x \in X \mapsto \overline{p_1^{-1}x} \in w_jX \cap X\backslash X.$$

Soit Q_j la forme quadratique non dégénérée sur $w_jX \cap X\backslash X$ définie par :

$$Q_j(x) = \frac{1}{2}\langle w_S x, x\rangle.$$

Pour toute mesure de Haar μ sur $w_jX \cap X\backslash X$, on note $\mu_{w_j} = \Omega_\mu(\psi \circ Q_j)^{-1}\mu$ la mesure de Haar définie dans la Proposition 1.7, dont on rappelle qu'elle s'interprète comme la mesure naturelle sur R qui normalise la transformée de Fourier vis-à-vis de ψ et de l'isomorphisme symétrique $\rho : x \mapsto \langle w_S x, \cdot\rangle$.

Lemme 3.23. *La mesure de Haar sur $gX \cap X\backslash X$ définie par :*

$$\mu_g = \Omega_{1,\det_X(p_1p_2)} \times \phi_1 \cdot \mu_{w_j}$$

ne dépend pas des choix de p_1 et p_2.

Démonstration. Soient $g = p_1w_jp_2 = p'_1w_jp'_2$ deux décompositions de g. Alors $\phi_1^{-1} \circ \phi'_1$ est un automorphisme de $w_jX \cap X\backslash X$. Pour prouver que la définition est consistante, on est ramené à prouver que :

$$\Omega_{1,\det_X(p_1p_2)} \times |\det(\phi_1^{-1} \circ \phi'_1)|_F = \Omega_{1,\det_X(p'_1p'_2)}.$$

Or, d'après [RR93, Lem. 3.4], on a :

$$\det(\phi_1^{-1} \circ \phi'_1)^2 = \det_X(p_1^{-1}p'_1p'_2p_2^{-1})$$

puisque $p_1^{-1}p'_1w_jp'_2p_2^{-1} = w_j$. Or, d'après la Proposition 1.4, on a :

$$\Omega_{1,\det(\phi_1^{-1}\circ\phi'_1)^2\det_X(p_1p_1)} = |\det(\phi_1^{-1} \circ \phi'_1)|_F \times \Omega_{1,\det_X(p_1p_2)}.$$

Donc la définition de μ_g est bien consistante. □

Soit $g \in \Omega_j$. Soient p_1 et p_2 dans $P(X)$ tels que $g = p_1w_jp_2$. On définit $x(g)$ comme l'image de $\det_X(p_1p_2)$ dans $F^\times/F^{\times 2}$. Alors $x(g)$ est bien défini car il ne dépend pas du choix de p_1 et p_2 d'après [RR93, Lem. 3.4]. De plus, on a $x(w_S) = 1$ pour tout $S \subset [\![1, m]\!]$. Le point g) de la Proposition 1.4 donne alors :

Corollaire 3.24. *Pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$ et tout $p \in P(X)$, on a :*

$$\mu_{gp} = (x(p), x(g))_F \times \Omega_{1,\det_X(p)} \times \mu_g.$$

Et en notant $\phi_p : x \in gX \cap X\backslash X \mapsto \overline{px} \in pgX \cap X\backslash X$:

$$\mu_{pg} = (x(p), x(g))_F \times \Omega_{1,\det_X(p)} \times \phi_p \cdot \mu_g.$$

On rappelle que $p_{S_X} : \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ est la projection associée au modèle de Schrödinger S_X. On réemploie les notations de la Section 3.2.1 pour les opérateurs de changement de modèles $I_{A_1,A_2,\mu,\omega}$. On définit une section de p_{S_X} à l'aide des mesures précédentes :

$$\sigma : g \in \mathrm{Sp}(W) \mapsto \sigma(g) = I_{gX,X,\mu_g,0} \circ I_g \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W)$$

dont on note $\hat{c}$ le 2-cocyle associé *i.e.* :

$$\hat{c} : (g, g') \in \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{Sp}(W) \mapsto \sigma(g)\sigma(g')\sigma(gg')^{-1} \in R^\times.$$

Lemme 3.25.

a) *Pour tout* $g \in \mathrm{Sp}(W)$ *et tout* $p \in P(X)$ *:*

$$\hat{c}(g,p) = \hat{c}(p,g) = \hat{c}(p^{-1},g) = (x(p),x(g))_F.$$

b) *Pour tout* S *et* S' *dans* $[\![1,m]\!]$*, en notant* $l = |S \cap S'|$*, on a :*

$$\hat{c}(w_S, w_{S'}) = (-1,-1)_F^{\frac{l(l-1)}{2}}.$$

c) *Soient* $S \subset [\![1,m]\!]$ *et* $W = W_S + W_{^cS}$*, de sorte que le sous-groupe de* $\mathrm{Sp}(W)$ *:*

$$G_S = \{g \in \mathrm{Sp}(W) \mid g(W_S) \subset W_S \text{ et } g|_{W_S} = \mathrm{Id}_{W_S}\}$$

soit canoniquement isomorphe à $\mathrm{Sp}(W_{^cS})$ *via la restriction à* $W_{^cS}$*. On adopte des notations similaires pour* ^cS*. Alors pour tout* $g \in G_S$ *et tout* $g' \in G_{^cS}$*, on a l'égalité :*

$$\hat{c}(g,g') = \hat{c}(g',g) = (x(g),x(g'))_F.$$

Démonstration. a) Soient $p \in P(X)$ et $g \in \mathrm{Sp}(W)$. Alors, comme $\sigma(p) = \Omega_{1,\det_X(p)} \times I_p$, on déduit du Corollaire 3.24 précédent que :

$$\sigma(pg) = (x(p),x(g))_F \times \sigma(g)\sigma(p) \text{ et } \sigma(pg) = (x(p),x(g))_F \times \sigma(p)\sigma(g).$$

Cela montre que $\hat{c}(p,g) = \hat{c}(g,p) = (x(p),x(g))_F$. Enfin, $x(p) = x(p^{-1})$ par définition.
b) On note γ_S l'isomorphisme induit par w_S de X_S vers Y_S. Alors pour tout $f \in C_c^\infty(Y)$:

$$\sigma(w_S)f : y \mapsto \int_{w_SX\cap X\backslash X} \psi(\langle a,y\rangle)f((-\gamma_S a,0))d\mu_{w_S}(a).$$

On pose $\rho_S : x \in X_S \mapsto \langle \gamma_S x, \cdot\rangle \in X_S^*$ qui un isomorphisme symétrique. En reprenant les notations de la Proposition 1.7, soit :

$$M_{\gamma_S} : f \in C_c^\infty(Y_S) \mapsto \mathcal{F}_{\mu_{\rho_S}}(f \circ (-\gamma_S)) \circ (-\gamma_S)^{-1} \in C_c^\infty(Y_S)$$

où pour $f' \in C_c^\infty(X_S)$ et $x \in X_S$:

$$\mathcal{F}_{\mu_{\rho_S}} f'(x) = \int_{X_S} \psi(\langle \gamma_S x, a\rangle) f'(a) d\mu_{w_S}(a).$$

Dans la décomposition $C_c^\infty(Y) = C_c^\infty(Y_S) \otimes C_c^\infty(Y_{^cS})$, on a $\sigma(w_S) = M_{\gamma_S} \otimes \mathrm{Id}$. Il en va de même avec $w_{S'}$ et $\sigma(w_{S'})$.

Maintenant, la décomposition $C_c^\infty(Y) = C_c^\infty(Y_{S\cap S'}) \otimes C_c^\infty(Y_{S\Delta S'}) \otimes C_c^\infty(Y_{^c(S\cup S')})$ donne que la composée $\sigma(w_S)\circ\sigma(w_{S'})$ s'écrit comme $(M_{\gamma_S} \circ M_{\gamma_{S'}}) \otimes M_{\gamma_{S\Delta S'}} \otimes \mathrm{Id}$ où $\gamma_{S\Delta S'}$ est associé à $w_{S\Delta S'}$. Or, la restriction de M_{γ_S} et $M_{\gamma_{S'}}$ à $C_c^\infty(Y_{S\cap S'})$ sont toutes deux égales à $M_{\gamma_{S\cap S'}}$. Ensuite :

$$\begin{aligned} M^2_{\gamma_{S\cap S'}} f &= \mathcal{F}_{\mu_{\rho_{S\cap S'}}}(M_{\gamma_{S\cap S'}} f \circ (-\gamma_{S\cap S'})) \circ (-\gamma_{S\cap S'})^{-1} \\ &= \mathcal{F}_{\mu_{\rho_{S\cap S'}}}(\mathcal{F}_{\mu_{\rho_{S\cap S'}}}(f \circ (-\gamma_{S\cap S'}))) \circ (-\gamma_{S\cap S'})^{-1} \\ &= \mathcal{F}^2_{\mu_{\rho_{S\cap S'}}}(f \circ (-\gamma_{S\cap S'})) \circ (-\gamma_{S\cap S'})^{-1}. \end{aligned}$$

Finalement, la Proposition 1.7 donne que pour tout $f \in C_c^\infty(Y_{S\cap S'})$ et tout $y \in Y_{S\cap S'}$:

$$M^2_{\gamma_{S\cap S'}} f(y) = (-1, \det(Q_{\frac{1}{2}\rho_{S\cap S'}}))_F (\Omega_{-1,1})^l \times f(-y).$$

En remarquant que $w_S w_{S'} = w_{S\Delta S'} a_{S\cap S'}$ où $a_{S\cap S'} = (-\mathrm{Id}_{W_{S\cap S'}}) \oplus \mathrm{Id}_{W_{c(S\cap S')}}$ est dans $P(X)$, la mesure $\mu_{w_S w_{S'}} = \Omega_{1,(-1)^l} \times \mu_{w_{S\cap S'}}$. Dans la décomposition précédente, $\sigma(w_S w_{S'})$ s'écrit alors $A_{S\cap S'} \otimes M_{\gamma_{S\Delta S'}} \otimes \mathrm{Id}$ où $A_{S\cap S'} f(y) = \Omega_{1,(-1)^l} \times f(-y)$. Par conséquent, comme :

$$(-1, \det(Q_{\frac{1}{2}\rho_{S\cap S'}}))_F = (-1, 2^{-l})_F = (-1, 2^l)_F = \big((-1,2)_F\big)^l = \big((-1,-1)_F\big)^l,$$

il vient :

$$\hat{c}(w_S, w_{S'}) = \big((-1,-1)_F \Omega_{-1,1}\big)^l \times \Omega_{(-1)^l,1}.$$

En appliquant récursivement le point g) de la Proposition 1.4 :

$$\Omega_{(-1)^l,1} = (\Omega_{-1,1})^l \times (-1,-1)_F^{\frac{l(l-1)}{2}}.$$

Enfin, on conclut grâce à l'égalité $(\Omega_{-1,1})^2 = (-1,-1)_F$ que $\hat{c}(w_S, w_{S'}) = (-1,-1)_F^{\frac{l(l-1)}{2}}$.
c) D'une part, pour tout $f \in S_X$, un calcul explicite de $\sigma(g) \circ \sigma(g') f((0,0))$ donne :

$$\int_{gX\cap X\backslash X} \int_{g'X\cap X\backslash X} f(((g')^{-1}a', 0)((g')^{-1}g^{-1}a, 0)) d\mu_{g'}(a') d\mu_g(a).$$

D'autre part, le morphisme de réduction :

$$x \in X \mapsto (p_g(x), p_{g'}(x)) \in (g'X \cap X\backslash X) \times (gX \cap X\backslash X)$$

a pour noyau $gg'X \cap X$. Or, g et g' commutent entre eux et chacun de ces morphismes induit le morphisme identité par passage au quotient sur $g'X \cap X\backslash X$ et $gX \cap X\backslash X$ respectivement. De plus, on déduit du point g) de la Proposition 1.4 qu'on a :

$$\mu_g \otimes \mu_{g'} = (x(g), x(g'))_F \mu_{gg'}.$$

Par conséquent, un changement de variable dans l'intégrale donne l'égalité :

$$\sigma(g) \circ \sigma(g') f((0,0)) = (x(g), x(g'))_F \times \sigma(gg') f((0,0))$$

pour tout $f \in S_X$. Cela entraîne donc l'égalité $\sigma(g) \circ \sigma(g') = (x(g), x(g'))_F \times \sigma(gg')$. □

Définition 3.26. On note $\mathrm{Sp}(W) \times_{\hat{c}} R^\times$ l'ensemble $\mathrm{Sp}(W) \times R^\times$ muni de la loi de groupe :

$$(g, \lambda) \cdot (g', \lambda') = (gg', \hat{c}(g, g')\lambda\lambda').$$

Théorème 3.27. *On distingue les cas comme dans le Théorème 3.4.*

a) *Si F est fini, ou si la caractéristique ℓ de R est 2, alors $\hat{c}$ est le 2-cocyle trivial. Par conséquent, σ est une section de p_{S_X} qui est un morphisme de groupes. De plus, un tel morphisme de groupes est unique sauf dans le cas exceptionnel $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F W = 2$, et définit toujours un isomorphisme d'extensions centrales :*

$$(g, \lambda) \in \mathrm{Sp}(W) \times R^\times \mapsto (g, \lambda\sigma(g)) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W).$$

b) *Si F est local non archimédien et $\ell \neq 2$, alors $\hat{c}$ est à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Par conséquent, σ est l'unique section réalisant l'isomorphisme d'extensions centrales :*

$$(g, \lambda) \in \mathrm{Sp}(W) \times_{\hat{c}} R^\times \mapsto (g, \lambda\sigma(g)) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W).$$

et dont la restriction à $\mathrm{Sp}(W) \times_{\hat{c}} \{\pm 1\}$ induit un isomorphisme d'extensions centrales avec $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W)$.

Démonstration. Dans le premier cas, on va montrer que $\hat{c}$ est le cocycle trivial ; dans le second, que $\hat{c}$ est à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Les formules obtenues sont valables dans les deux cas, bien que triviales dans le premier. Soient $p_1, p_2, p \in P(X)$ et $g_1, g_2 \in \mathrm{Sp}(W)$. Alors on déduit du Lemme 3.25 en décomposant $\sigma(g_1 p^{-1}) \circ \sigma(p g_2)$:

$$\hat{c}(g_1 p^{-1}, p g_2) = \hat{c}(p, p)\hat{c}(g_1, g_2)\hat{c}(g_1, g_2)$$

ainsi que $\sigma(p_1 g_1) \circ \sigma(g_2 p_2)$:

$$\hat{c}(p_1 g_1, g_2 p_2) = \hat{c}(p_1, g_1)\hat{c}(g_2, p_2)\hat{c}(p_1, g_1 g_2)\hat{c}(p_1 g_1 g_2, p_2)\hat{c}(g_1, g_2).$$

Par conséquent :

$$\hat{c}(p_1 g_1 p^{-1}, p g_2 p_2)\hat{c}(g_1, g_2)^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{dans le premier cas ;} \\ \pm 1 & \text{dans le second.} \end{cases}$$

Il reste à prouver que pour g_1 et g_2 bien choisis, le cocycle $\hat{c}(g_1, g_2)$ est trivial ou à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Pour ce faire, on utilise une décomposition associé à l'invariant de Leray [RR93, Th. 2.16]. Pour tout g_1 et g_2 dans $\mathrm{Sp}(W)$, il existe S_1, S_2 et S dans $[\![1, m]\!]$, et un isomorphisme $\rho : Y_S \to X_S$ antisymétrique, *i.e.* $\rho^* = -\rho$, de sorte que $(S_1 \cup S_2) \cap S = \emptyset$ et $g_1 = p_1 w_{S \cup S_1} u_\rho p^{-1}$ et $g_2 = p w_{S \cup S_2} p_2$. Il suffit donc de calculer pour le morphisme ρ en question $\hat{c}(w_{S \cup S_1} u_\rho, w_{S \cup S_2})$. Or, en calculant $\sigma(w_{S \cup S_1} u_\rho) \circ \sigma(w_{S \cup S_2})$ de différentes manières, on obtient :

$$\hat{c}(w_{S \cup S_1} u_\rho, w_{S \cup S_2}) = \hat{c}(w_S u_\rho, w_S)\hat{c}(w_{S_1} w_{S_2}, w_S u_\rho w_S)\hat{c}(w_{S_1}, w_{S_2}).$$

Et d'après le Lemme 3.25, on sait que $\hat{c}(w_{S_1} w_{S_2}, w_S u_\rho w_S) = ((-1)^{|S_1 \cap S_2|}, x(w_S u_\rho w_S))_F$ et $\hat{c}(w_{S_1}, w_{S_2})$ est une puissance de $(-1, -1)_F$.

Il reste à étudier le facteur $\hat{c}(w_S u_\rho, w_S)$. Le lemme suivant permet de conclure que $\hat{c}$ prend bien les valeurs recherchées :

Lemme 3.28. *On a :*

$$\hat{c}(w_S u_\rho, w_S) = (-2, \det(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}))_F \times h_F(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S})$$

où $Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}(x) = \langle x, \gamma_S\rho\gamma_S x\rangle$ *est une forme quadratique non dégénérée sur* X_S.

Démonstration. Il s'agit donc de calculer, pour tout $S \subset [\![1, m]\!]$ et tout $\rho : Y_S \to X_S$ de sorte que $u_\rho \in \mathrm{Sp}(W)$, la composée $\sigma(w_S u_\rho) \circ \sigma(w_S)$ en termes de $\sigma(w_S u_\rho w_S)$. Soit $f \in S_X$. Comme $\sigma(w_S u_\rho) = \sigma(w_S) \circ \sigma(u_\rho)$ d'après le Lemme 3.25 :

$$\sigma(w_S u_\rho) \circ \sigma(w_S) f((0,0)) = \int_{X_S} (\sigma(u_\rho) \circ \sigma(w_S) f)((w_S^{-1}a, 0)) d\mu_{w_S}(a).$$

Or, $(\sigma(u_\rho)\circ\sigma(w_S)f)((w_S^{-1}a, 0)) = \psi(\frac{1}{2}\langle w_S^{-1}a, (-\rho)w_S^{-1}a\rangle) \times (\sigma(w_S)f)((w_S^{-1}a, 0))$ d'après les formules du modèle de Schrödinger de la Section 3.2.1. Mais :

$$\begin{aligned}
\sigma(w_S)f((w_S^{-1}a, 0)) &= \int_{X_S} f((w_S^{-1}a', 0)(w_S^{-2}a, 0) d\mu_{w_S}(a') \\
&= \int_{X_S} \psi(\langle a', w_S^{-1}a\rangle) f((w_S^{-1}a', 0))) d\mu_{w_S}(a') \\
&= |\phi_{\rho,S}|^{-1} \int_{X_S} \psi(\langle w_S^{-1}a, \rho w_S^{-1}a''\rangle) f((-w_S^{-1}\rho w_S^{-1}a'', 0) d\mu_{w_S}(a'')
\end{aligned}$$

où le changement de variable opéré est $a' = \phi_{\rho,S}(a'') = -\rho w_S^{-1}a''$ pour l'automorphisme $\phi_{\rho,S}$ de X_S induit par $-\rho w_S^{-1}$ sur X_S.

Ensuite, comme $u_\rho^{-1} = u_{-\rho}$:

$$-w_S^{-1}\rho w_S^{-1}a'' = w_S^{-1}u_\rho^{-1}w_S^{-1}a'' - w_S^{-2}a''.$$

Par conséquent :

$$f((-w_S^{-1}\rho w_S^{-1}a'', 0)) = \psi(\frac{1}{2}\langle w_S^{-1}a'', (-\rho)w_S^{-1}a''\rangle) f((w_S^{-1}u_\rho^{-1}w_S^{-1}a'', 0)).$$

On obtient donc pour $\sigma(w_S u_\rho) \circ \sigma(w_S) f((0,0))$ au facteur $|\phi_{\rho,S}|^{-1}$ près :

$$\int_{X_S}\int_{X_S} \psi\left(\frac{1}{2}\langle w_S^{-1}(a - a''), (-\rho)w_S^{-1}(a - a'')\rangle\right) (I_{w_S u_\rho w_S} f)((a'', 0)) d\mu_{w_S}(a'') d\mu_{w_S}(a).$$

À l'aide du facteur de Weil non normalisé défini dans la Section 1.2, cette dernière expression se simplifie en :

$$\Omega_{\mu_{w_S}}(\psi \circ Q_S) \times \int_{X_S} (I_{w_S u_\rho w_S} f)((a'', 0)) d\mu_{w_S}(a'')$$

où $Q_S(x) = -\frac{1}{2}\langle x, w_S\rho w_S^{-1}x\rangle$.

De plus $w_S u_\rho w_S \in G_{^cS}$ et admet comme décomposition dans $W_S = X_S + Y_S$:

$$w_S u_\rho w_S = \begin{bmatrix} * & * \\ \gamma_S\rho\gamma_S & * \end{bmatrix} \text{ où } w_S = \begin{bmatrix} * & * \\ \gamma_S & * \end{bmatrix} \text{ et } \gamma_S^* = -\gamma_S.$$

Comme $\gamma_S\rho\gamma_S$ est de rang $|S|$, il existe p_1 et p_2 dans $P(X_S)$ telles que $w_Su_\rho w_S = p_1w_Sp_2$. De plus, il existe une décomposition de la forme :

$$w_Su_\rho w_S = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{X_S} & * \\ 0 & \mathrm{Id}_{Y_S} \end{bmatrix} w_S \begin{bmatrix} a & * \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{bmatrix}.$$

En particulier, une telle décomposition impose que $\gamma_Sa = \gamma_S\rho\gamma_S$. En d'autres termes $a = \rho\gamma_S \in \mathrm{GL}_F(X_S)$. Avec ces notations, on a $\phi_{\rho,S} = \rho\gamma_S$ et $Q_S(x) = \frac{1}{2}\langle x, \gamma_S\rho\gamma_Sx\rangle$.

L'expression de la mesure $\mu_{w_Su_\rho w_S}$ est alors :

$$\mu_{w_Su_\rho w_S} = \Omega_{1,\det(\rho\gamma_S)} \times \mu_{w_S}.$$

On obtient donc la formule :

$$\hat{c}(w_Su_\rho, w_S) = |\phi_{\rho,S}|^{-1} \times \Omega_{\mu_{w_S}}(\psi \circ Q_S) \times \Omega_{\det(\rho\gamma_S),1},$$

que l'on se propose de simplifier dans la suite de la preuve.

D'une part, dans la base standard $\mathcal{B}$ de X_S, on a d'après le Corollaire 1.5 :

$$\Omega_{\mu_{w_S}}(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\gamma_S\rho\gamma_S}) = \Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{\frac{1}{2}\gamma_S\rho\gamma_S}),1} \times h_F(Q_{\frac{1}{2}\gamma_S\rho\gamma_S}) \times \Omega_{\mu_{w_S}}(\psi \circ Q_{\gamma_S}).$$

Or $\Omega_{\mu_{w_S}}(\psi \circ Q_{\gamma_S}) = (\Omega_{1,\frac{1}{2}})^{|S|} \times \Omega_{\mu_{w_S}}(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\gamma_S}) = (\Omega_{1,\frac{1}{2}})^{|S|}$ où la dernière égalité se déduit par définition de la mesure μ_{w_S}. De plus :

$$h_F(Q_{\frac{1}{2}\gamma_S\rho\gamma_S}) = (2, \det(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S})^{|S|-1})_F \times h_F(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}).$$

et :

$$\Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{\frac{1}{2}\gamma_S\rho\gamma_S}),1} = (2^{-|S|}, \det(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}))_F \times \Omega_{2^{-|S|},1} \times \Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}),1}$$

En remarquant que $\Omega_{2^{-|S|},1} = (\Omega_{\frac{1}{2},1})^{|S|}$, il vient :

$$\Omega_{\mu_{w_S}}(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\gamma_S\rho\gamma_S}) = (2, \det(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}))_F \times \Omega_{\det_{\mathcal{B}}(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}),1} h_F(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}).$$

D'autre part, la représentation matricielle de la forme quadratique $Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}(x) = {}^tXMX$ où $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho\gamma_S)$ et $X \in F^{|S|}$ est le vecteur coordonné associé à $x \in X$ dans la base $\mathcal{B}$. Cela signifie que $\det_{\mathcal{B}}(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}) = \det(\rho\gamma_S)$. Comme pour tout $a \in F^\times$, on a $(\Omega_{a,1})^2 = |a| \times (a,a)_F = |a| \times (-1,a)_F$:

$$\hat{c}(w_Su_\rho, w_S) = (-2, \det(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}))_F \times h_F(Q_{\gamma_S\rho\gamma_S}).$$

□

Pour terminer la preuve du point a), la propriété d'unicité dans le cas non exceptionnel vient de l'énoncé du Théorème 3.4. Celle du point b) est un fait classique pour les isomorphismes d'extensions centrales car $\mathrm{Sp}(W)$ est un groupe parfait. □

Remarque 3.29. La formule que l'on obtient dans la preuve pour $\hat{c}(w_S u_\rho, w_S)$ diverge de celle de [RR93], mais seulement en apparence, au sens où ces deux cocycles sont égaux en cohomologie. En effet, le choix de mesure qu'il opère correspond avec les notations de la Proposition 3.23 à $\mu_{g,\mathrm{Rao}} = \Omega_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\det_X(p_1p_2)} \times \phi_1 \cdot \mu_{w_j} = (2, x(g))_F \times \mu_g$ donc :

$$\sigma_{\mathrm{Rao}}(g) = (2, x(g))_F \times \sigma(g).$$

Plus généralement, un choix de mesure du type $\mu_{g,\alpha} = \Omega_{\alpha,\alpha\det_X(p_1p_2)} \times \phi_1 \cdot \mu_{w_j}$ pour $\alpha \in F^\times$ donne un 2-cocycle $\hat{c}_\alpha$ dans la même classe de cohomologie que $\hat{c}$. Il faut modifier en conséquence le point b) du Lemme 3.25 et le Lemme 3.28 pour $\hat{c}_\alpha$, mais tout le développement précédent reste valable.

Corollaire 3.30. *Excepté dans le cas exceptionnel $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F(W) = 2$, la section σ est à valeurs dans $\widehat{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S_X}(W)$.*

Corollaire 3.31. *Soient g_1 et g_2 dans $\mathrm{Sp}(W)$. Par définition de l'invariant de Leray, il existe $p_1, p_2, p \in P(X)$, $S \subset [\![1, m]\!]$, un isomorphisme antisymétrique $\rho : Y_S \to X_S$ et $S_1, S_2 \subset {}^cS$ tels que $g_1 = p_1 w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}$ et $g_2 = p w_{S\cup S_2} p_2$. Avec ces notations, et en posant $l = |S_1 \cap S_2|$, on a :*

$$\begin{aligned}\hat{c}(g_1, g_2) = (x(g_1), x(g_2))_F \times (x(g_1)x(g_2), -x(g_1g_2))_F \times (-1, -1)_F^{\frac{l(l-1)}{2}} \\ \times ((-1)^l, x(w_S u_\rho w_S))_F \times \hat{c}(w_S u_\rho, w_S).\end{aligned}$$

Démonstration. En reprenant la preuve précédente :

$$\begin{aligned}\hat{c}(p_1 w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}, p w_{S\cup S_2} p_2) = \hat{c}(p_1, w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}) \times \hat{c}(p_1, w_{S\cup S_1} u_\rho w_{S\cup S_2} p_2) \\ \times \hat{c}(w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}, p w_{S\cup S_2} p_2)\end{aligned}$$

Or $\hat{c}(p_1, w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}) = (x(p_1), x(p))_F$ et :

$$\hat{c}(p_1, w_{S\cup S_1} u_\rho w_{S\cup S_2} p_2) = (x(p_1), x(w_{S\cup S_1} u_\rho w_{S\cup S_2}) x(p_2))_F.$$

Comme $x(w_{S\cup S_1} u_\rho w_{S\cup S_2}) = x(w_{S_1} w_{S_2}) x(w_S u_\rho w_S) = (-1)^l x(w_S u_\rho w_S)$:

$$\hat{c}(g_1, g_2) = (x(p_1), x(p))_F \times (x(p_1), (-1)^l x(w_S u_\rho w_S))_F \times \hat{c}(w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}, p w_{S\cup S_2} p_2).$$

Les détails sont omis car similaires, mais on a de même :

$$\begin{aligned}\hat{c}(w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}, p w_{S\cup S_2} p_2) = (x(p), x(p_2))_F \times ((-1)^l x(w_S u_\rho w_S), x(p_2))_F \\ \times \hat{c}(w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}, p w_{S\cup S_2}).\end{aligned}$$

De plus $x(g_1g_2) = x(p_1)(-1)^l x(w_S u_\rho w_S) x(p_2)$. Et puisque :

$$\hat{c}(w_{S\cup S_1} u_\rho p^{-1}, p w_{S\cup S_2}) = (x(p), x(p))_F \times \hat{c}(w_{S\cup S_1} u_\rho, w_{S\cup S_2}),$$

il vient :

$$\hat{c}(g_1, g_2) = (x(g_1), x(g_2))_F \times (x(g_1)x(g_2), -x(g_1)x(g_2))_F \times \hat{c}(w_{S\cup S_1}u_\rho, w_{S\cup S_2}).$$

Et d'après la discussion préliminaire au Lemme 3.28 :

$$\hat{c}(w_{S\cup S_1}u_\rho, w_{S\cup S_2}) = ((-1)^l, x(w_S u_\rho w_S))_F \times (-1,-1)_F^{\frac{l(l-1)}{2}} \times \hat{c}(w_S u_\rho, w_S).$$

□

4 Relevés de paires duales et scindages

Soit (H_1, H_2) une paire duale réductive dans le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$. On rappelle (cf. [MVW87, Chap. I, 1.17]) que H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de $\mathrm{Sp}(W)$ qui sont les centralisateurs l'un de l'autre. Ils sont de plus réductifs.

Soit $p_S : \widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ la projection associée à un modèle S de la représentation de Weil modulaire. On note alors :

$$\widetilde{H}_{1,S} = p_S^{-1}(H_1) \text{ et } \widetilde{H}_{2,S} = p_S^{-1}(H_2).$$

Proposition 4.1. *Le centralisateur de $\widetilde{H}_{1,S}$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$ est $\widetilde{H}_{2,S}$, et vice-versa.*

Démonstration. Soit g dans le centralisateur de $\widetilde{H}_{1,S}$. Alors $p_S(g)$ est dans le centralisateur de H_1 c'est-à-dire $p_S(g) \in H_2$. Le Lemme 3.15 assure que le centralisateur de H_2 contient $\widetilde{H}_{1,S}$. D'où l'égalité. Enfin les mêmes arguments s'appliquent pour $\widetilde{H}_{1,S}$ et le centralisateur de $\widetilde{H}_{2,S}$. □

Par conséquent, la paire $(\widetilde{H}_{1,S}, \widetilde{H}_{2,S})$ est une paire duale dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}^R_{\psi,S}(W)$. Dorénavant, toutes les paires duales considérées dans le groupe métaplectique seront de ce type. On dit que cette paire est le *relevé au groupe métaplectique* de la paire (H_1, H_2). En général, la théorie se ramène à l'étude des paires duales réductives irréductibles. Elles sont en un certain sens minimales car elles ne proviennent pas de produits de paires duales plus petites – pour une définition rigoureuse [MVW87, *Ibid.*]. Leur classification se divise entre les paires de type I et celles de type II.

Soit H un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(W)$. Le groupe $\widetilde{H}_S = p_S^{-1}(H)$ est dit *scindé* s'il existe un morphisme de groupes $H \to \widetilde{H}_S$ qui est une section de p_S. Dans ce cas, il existe un isomorphisme d'extensions centrales entre l'extension centrale triviale $H \times R^\times$ et $\widetilde{H}_S$. De plus, l'ensemble de ces isomorphismes est en bijection avec l'ensemble des caractères de H à valeurs dans $R^\times$.

D'après le Théorème 3.27, tout relevé d'un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(W)$ est scindé si F est fini ou si R est de caractéristique 2. On suppose donc dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cette partie, que F est local non archimédien et R n'est pas de caractéristique 2.

4.1 Scindages des relevés de paires duales via un parabolique

Voici une première réponse concernant les scindages de relevés de paires duales :

Proposition 4.2. *Soit (H_1, H_2) une paire duale irréductible dans* $\mathrm{Sp}(W)$.

- *Si cette paire est de type II, alors $\widetilde{H}_{1,S}$ et $\widetilde{H}_{2,S}$ sont scindés.*
- *Si elle est de type I, il existe $W = W_1 \otimes W_2$ telle que $(H_1, H_2) = (U(W_1), U(W_2))$. Si W_2 est scindé, alors $\widetilde{H}_{1,S}$ est scindé.*

Démonstration. Grâce à la Proposition 3.16, il suffit de prouver que les groupes en question sont inclus dans un groupe parabolique de $\mathrm{Sp}(W)$. Tout d'abord, si la paire est de type II, il existe un lagrangien X de W tel que H_1 et H_2 soient contenus dans $P(X)$ d'après [MVW87, Chap. I, 1.19]. Si celle-ci est de type I, il existe [MVW87, *Ibid*] une décomposition $W = W_1 \otimes W_2$ telle que la paire duale (H_1, H_2) soit de la forme énoncée. Si W_2 est scindé, alors $U(W_1)$ est inclus dans le parabolique $P(W_1 \otimes X_2)$ pour tout lagrangien X_2 de W_2. □

Il est possible de décrire de manière plus précise où vit ce scindage. La question suivante est intéressante à divers titres : existe-t-il un scindage de $\widetilde{H}_{1,S}$ à valeurs dans $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$? La réponse sera précisée à l'aide de :

Lemme 4.3. *On rappelle que le contexte considéré ici est F local non archimédien et R de caractéristique différente de 2. Soit X un lagrangien dans W.*

a) *Si F est une extension finie de $\mathbb{Q}_2$ et -1 n'est pas un carré dans F, alors il n'existe pas scindages de $P(X)$ à valeurs dans $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$.*

b) *Sinon, en posant $s = \mathrm{val}_F(2)$ où val_F est la valuation normalisée dans F, il existe $4 \times q^s$ scindages de $P(X)$ à valeurs dans $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$.*

Remarque 4.4. Quand la caractéristique résiduelle est impaire, on a $s = 0$.

Démonstration. On traite d'abord le cas où W est de dimension 2. On choisit comme modèle $S = S_X$. D'après le Lemme 3.25, il est équivalent de dénombrer l'ensemble des sections de :

$$(p, \lambda) \in P(X) \times_{\hat{c}} R^\times \mapsto p \in P(X)$$

qui sont des morphismes de groupes à valeurs dans $P(X) \times_{\hat{c}} \{\pm 1\}$. On rapelle qu'ici $P(X) \simeq M(X) \ltimes N(X) = F^\times \ltimes F$ et :

$$\hat{c} : (x, y) = ((a_x, n_x), (a_y, n_y)) \in P(X) \mapsto (a_x, a_y)_F \in \{\pm 1\}.$$

Comme l'application $n \in N(X) \mapsto (n, 1) \in P(X) \times_{\hat{c}} R^\times$ est un morphisme de groupes, et que son image est distinguée, l'existence d'une section qui est un morphisme de groupes de $P(X)$ à valeurs dans $P(X) \times_{\hat{c}} \{\pm 1\}$ est équivalente à l'existence d'une section de $\varepsilon : (a, \varepsilon) \in F^\times \times_{\hat{c}} \{\pm 1\} \mapsto a \in F^\times$ qui est un morphisme de groupes. De manière équivalente, la question se ramène à : existe-t-il une application $\varepsilon : a \in F^\times \mapsto \varepsilon_a \in \{\pm 1\}$ de sorte que $a \in F^\times \mapsto (a, \varepsilon_a) \in F^\times \times_{\hat{c}} \{\pm 1\}$ soit un morphisme de groupes ?

Étant donné que $\hat{c}(a,a') = (a,a')_F$, l'application ε doit vérifier pour tout $a, a' \in F^\times$:

$$\varepsilon_a \varepsilon_{a'} = (a,a')_F \varepsilon_{aa'}.$$

En particulier, on déduit de cette relation et de $(a,a)_F = (-1,a)_F$ pour tout $a \in F$ que :

- si -1 est un carré dans F, cette relation impose que ε est constante sur les classes modulo les carrés, donc se factorise en une application $F^\times/F^{\times 2} \to \{\pm 1\}$, encore notée ε ;
- si -1 n'est pas un carré dans F, alors ε est constante sur les classes modulo les puissances 4-ème, donc se factorise en une application $F^\times/F^{\times 4} \to \{\pm 1\}$, encore notée ε.

a) Pour régler ce cas, on utilise un résultat plus fort. On rappelle que l'espace symplectique considéré W est de dimension 2 :

Lemme 4.5. *Si F est une extension finie de $\mathbb{Q}_2$ et -1 n'est pas un carré dans F, il n'existe pas de scindages de $\{\pm \mathrm{Id}_W\}$ à valeurs $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. Il en existe deux à valeurs dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$.*

Démonstration. En effet, soit λ un scindage de $\{\pm \mathrm{Id}_W\}$ à valeurs dans $\{\pm \mathrm{Id}_W\} \times_{\hat{c}} R^\times$ qui est un morphisme de groupes. Cela impose en particulier les relations $\lambda(\mathrm{Id}_W) = (\mathrm{Id}_W, 1)$ et $\lambda(-\mathrm{Id}_W) = (-\mathrm{Id}_W, \alpha)$ où $\alpha \in R^\times$. Or comme λ est un morphisme de groupes :

$$\lambda(-\mathrm{Id}_W)\lambda(-\mathrm{Id}_W) = \lambda(\mathrm{Id}_W).$$

Par conséquent $\alpha^2 = (-1,-1)_F = -1$. Une racine carrée de -1 appartient bien à R car il existe un caractère additif $\psi : F \to R^\times$ non trivial. Donc il n'existe pas de scindage de $\{\pm \mathrm{Id}_W\}$ à valeurs dans $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$, bien qu'il en existe toujours à valeurs dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. Ces derniers sont donnés par $\alpha \in \{\pm i\}$, ce qui en fait bien deux puisque R n'est pas de caractéristique 2.

Quand W est de dimension quelconque, on peut toujours se ramener à la situation du lemme précédent en considérant un sous-espace symplectique de dimension 2. En effet, il existe deux sous-espaces symplectiques W' et W'' de W tels que $W = W' \oplus W''$, la dimension de W' est 2 et $X = X \cap W' \oplus X \cap W''$. Alors le groupe $\{(\pm \mathrm{Id}_{W'}, \mathrm{Id}_{W''})\}$ est un sous-groupe évident de $\mathrm{Sp}(W)$, contenu dans $P(X)$. D'après le lemme précédent, il n'existe pas de scindages de $\{(\pm \mathrm{Id}_{W'}, \mathrm{Id}_{W''})\}$ à valeurs dans $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_X}(W)$. Donc *a fortiori*, il n'en existe pas pour $P(X)$. $\square$

b) On suppose pour commencer que -1 est un carré dans F. L'ensemble des caractères de $F^\times/F^{\times 2}$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ sont aux nombres de $|F^\times/F^{\times 2}| = 4 \times q^s$, où $s = 0$ si la caractéristique résiduelle est impaire ; et s est le degré de ramification de F sur $\mathbb{Q}_2$ sinon. Par conséquent, s'il existe un scindage à valeurs dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$, il en existe en tout $4 \times q^s$. Il s'agit maintenant de construire un tel scindage. Le groupe $F^\times/F^{\times 2}$ est muni d'une structure de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel évidente et pour laquelle l'application :

$$(a,a') \in F^\times/F^{\times 2} \mapsto (a,a')_F \in \{\pm 1\}$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénéré en identifiant $\{\pm 1\}$ à $\mathbb{F}_2$. De plus, tout vecteur est isotrope car -1 est un carré dans F. On peut donc trouver une base hyperbolique de $F^\times/F^{\times 2}$ notée $\{e_i, f_i\}_{1\leq i\leq q^s}$ qui vérifie :

$$(e_i, f_j)_F = -(-1)^{\delta_{i,j}}.$$

On pose alors $\varepsilon_{e_i} = \varepsilon_{f_i} = 1$. Et pour tout $x \in F^\times$, dont on note $\{x_{e_i}, x_{f_i}\}_{1\leq i\leq q^s}$ les coordonnées dans la base précédente, on pose enfin :

$$\varepsilon_x = \prod_{1\leq i\leq q^s} (x_{e_i}, x_{f_i})_F.$$

Il est aisé de vérifier que pour tout $x, y \in F^\times/F^{\times 2}$, on a la relation $\varepsilon_x\varepsilon_y = (x, y)_F\varepsilon_{xy}$. Ce qui donne un morphisme de groupes $p = (a, n) \in P(X) \mapsto (p, \varepsilon_a) \in P(X) \times_{\hat{c}} \{\pm 1\}$, qui est le scindage désiré quand W est de dimension 2.

Enfin, il reste à étudier le cas où -1 n'est pas un carré dans un corps local non archimédien F de caractéristique résiduelle impaire. Le groupe $F^\times/F^{\times 4} = \langle -1, \varpi_F\rangle$, où ϖ_F est une uniformisante dans $F^\times$, est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Par conséquent, il existe seulement 4 caractères à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Comme dans le paragraphe précédent, il suffit de construire une application $\varepsilon : a \in F^\times/F^{\times 4} \mapsto \varepsilon_a \in \{\pm 1\}$ qui donne un scindage $a \in F^\times \mapsto (a, \varepsilon) \in F^\times \times_{\hat{c}} \{\pm 1\}$. On rappelle les relations $(a, a)_F = (-1, a)_F$ et :

$$(-1, \varpi_F)_F = (-1, -\varpi_F)_F = -1 \text{ et } (-1, -1)_F = 1.$$

On tire de $\varepsilon_a\varepsilon_{a'} = (a, a')_F\varepsilon_{aa'}$ des conditions sur ε à savoir :

- $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_{\varpi_F^2} = -1$;
- $\varepsilon_{\varpi_F^3} = -\varepsilon_{\varpi_F}$ et $\varepsilon_{-\varpi_F^3} = -\varepsilon_{-\varpi_F}$;
- $\varepsilon_{\varpi_F}\varepsilon_{-\varpi_F} = \varepsilon_{-1}$ et $\varepsilon_{-\varpi_F^2} = -\varepsilon_{-1}$.

Selon les valeurs de ε_{-1}, on trouve que : quand $\varepsilon_{-1} = -1$ on doit avoir $\varepsilon_{\varpi_F} = -\varepsilon_{-\varpi_F}$; quand $\varepsilon_{-1} = 1$ on doit avoir $\varepsilon_{\varpi_F} = \varepsilon_{-\varpi_F}$. Ce qui restreint à 2 choix dans le premier cas, et 2 dans le deuxième, soit 4 au total. Ainsi, n'importe lequel de ces candidats devrait être un scindage. Pour ce faire, on vérifie à la main que l'application définie par $\varepsilon_{-1} = -1$ et $\varepsilon_{\varpi_F} = \varepsilon_{-\varpi_F} = 1$, et soumise aux trois relations précédentes, est consistante vis-à-vis de la relation $\varepsilon_a\varepsilon_{a'} = (a, a')_F\varepsilon_{aa'}$. Ce problème comporte un nombre finie de vérifications étant donné que $F^\times/F^{\times 4}$ est fini. Comme le symbole de Hilbert est symétrique, il suffit de considérer les 8 cas diagonaux $a = a'$ et les $(64-8)/2 = 28$ cas non diagonaux $a \neq a'$. On peut retirer les cas où $a = 1$ car immédiats, ce qui laisse $28 - 7 = 21$ vérifications aussi fastidieuses qu'élémentairement vraies.

Quand W est de dimension quelconque, le groupe dérivé de $P(X)$ est isomorphe à $\mathrm{SL}(X) \ltimes N(X)$. Ce dernier possède un (unique) scindage à valeurs dans $\mathrm{Sp}(W) \times_{\hat{c}} R^\times$ donné par $p \in \mathrm{SL}(X) \ltimes N(X) \mapsto (p, 1) \in \mathrm{Sp}(W) \times_{\hat{c}} R^\times$, et dont l'image encore notée $\mathrm{SL}(X) \ltimes N(X)$ est distinguée dans $P(X) \times_{\hat{c}} R^\times$. On peut donc quotienter par le sous-groupe $\mathrm{SL}(X) \ltimes N(X)$ pour se ramener au problème équivalent de trouver un scindage de $P(X)/(\mathrm{SL}(X) \ltimes N(X)) = F^\times$ à valeurs dans :

$$(P(X) \times_{\hat{c}} \{\pm 1\})/(\mathrm{SL}(X) \ltimes N(X)) = F^\times \times_{\hat{c}} \{\pm 1\}.$$

Ce qui ramène au cas de la dimension 2 que l'on vient d'étudier. $\square$

En examinant la preuve de la Proposition 4.2 à la lumière du Lemme 4.3 on obtient :

Corollaire 4.6. *Soit* (H_1, H_2) *une paire duale irréductible dans* $\mathrm{Sp}(W)$. *On note* $\widehat{H}_{1,S}$ *et* $\widehat{H}_{2,S}$ *les images réciproques respectives dans* $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. *On suppose que l'on exclut le cas où* F *est une extension finie de* $\mathbb{Q}_2$ *et* -1 *n'est pas un carré dans* F.

- *Si cette paire est de type II, alors* $\widehat{H}_{1,S}$ *et* $\widehat{H}_{2,S}$ *sont scindés ;*
- *si elle est de type I, il existe* $W = W_1 \otimes W_2$ *telle que* $(H_1, H_2) = (U(W_1), U(W_2))$. *Si* W_2 *est scindé, alors* $\widehat{H}_{1,S}$ *est scindé.*

4.2 Scindages de relevés de paires duales irréductibles de type I

Soit D une algèbre à division dont le centre E contient le corps local non archimédien F. Soit $\tau : D \to D$ une involution de D *i.e.* d'un anti-automorphisme de carré l'application identité. On suppose que F est l'ensemble des points fixes de τ. Les possibilités pour (D, E, F, τ) sont :

1. $D = E = F$ et $\tau = \mathrm{Id}_D$;
2. D est l'unique algèbre de quaternion sur $E = F$ et τ est l'involution canonique ;
3. $D = E$ est une extension quadratique de F et F est le générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$.

Soient $(W_1, \langle,\rangle_1)$ un espace ε_1-hermitien (à droite) sur D et $(W_2, \langle,\rangle_2)$ un espace ε_2-hermitien (à droite) sur D avec $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$. On peut munir W_2 d'une structure d'espace vectoriel à gauche pour tout $d \cdot w_2 = w_2 \tau(d)$ pour tout $d \in D$ et $w_2 \in W_2$.

Soit $t_{D/F} : D \to F$ une trace de D sur F *i.e.* $t_{D/F}$ est une forme linéaire non nulle telle que pour tout $d, d' \in D$:

$$t_{D/F}(\tau(d)d') = t_{D/F}(d\tau(d')).$$

Autrement dit $t_{D/F}$ est une trace invariante par τ, ce qui inclut le cas de la trace réduite. Il existe alors un unique produit symplectique $\langle,\rangle$ sur le F-espace vectoriel $W = W_1 \otimes_D W_2$ de sorte que pour tout $w_1, w_1' \in W_1$ et tout $w_2, w_2' \in W_2$:

$$\langle w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' \rangle = t_{D/F}\Big(\langle w_1, w_1' \rangle_1 \times \tau(\langle w_2, w_2' \rangle_2) \Big).$$

Dans cette situation, en considérant l'action naturelle des groupes d'isométries $U(W_1)$ et $U(W_2)$ sur $W = W_1 \otimes W_2$, la paire $(U(W_1), U(W_2))$ est une paire duale irréductible de type I dans $\mathrm{Sp}(W)$ qui ne provient pas d'une restriction des scalaires sur F d'après [MVW87, Chap. I, I.20]. Réciproquement, toute paire duale (H_1, H_2) dans un groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ qui est irréductible de type I et ne provient pas d'une restriction des scalaires sur F est obtenue à partir d'un tel procédé [MVW87, *Ibid.*].

Soit donc $(H_1, H_2) = (U(W_1), U(W_2))$ une paire duale dans un groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ où $W = W_1 \otimes_D W_2$. Soit S un modèle de la représentation métaplectique associée à un caractère additif $\psi : F \to R^\times$. On généralise [Kud94, Th. 3.1]. En revenant avec les distinctions précédentes pour (D, E, F, τ), les paires sont constituées de :

1. un groupe symplectique et un groupe orthogonal ;
2. deux groupes unitaires quaternioniques, l'un hermitien et l'autre anti-hermitien ;
3. deux groupes unitaires classiques, l'un hermitien et l'autre anti-hermitien.

Théorème 4.7. *On suppose que R contient une racine carrée de q et on la fixe.*

a) *Si W_1 est symplectique et W_2 est orthogonal de dimension impaire, alors l'extension $\widetilde{H}_{1,S}$ est isomorphe au groupe métaplectique sur W_1. En particulier, cette extension n'est pas scindée sur H_1.*

b) *Dans tous les autres cas, l'extension $\widetilde{H}_{1,S}$ est scindée sur H_1.*

Démonstration. Quand R contient une racine carrée de q, on peut définir le facteur de Weil classique ω d'après le point f) de la Proposition 1.4. En reprenant les notations du Corollaire 3.31, le 2-cocyle $\hat{c}$ est alors cohomologiquement équivalent au 2-cocycle :

$$c(g_1, g_2) = \omega(\psi \circ Q_{\frac{1}{2}\rho}).$$

Étant donné les propriétés du facteur de Weil classique, cette quantité ne dépend que de la classe d'isomorphisme de ρ *i.e.* de son déterminant, de son invariant de Hasse et de son rang. Ce 2-cocyle est à valeurs dans $\mu_8(R) = \{\lambda \in R^\times \mid \lambda^8 = 1\}$.

Par conséquent, l'extension $\widetilde{H}_{1,S}$ est isomorphe à $H_1 \times_{c_1} R^\times$ où le 2-cocyle c_1 est obtenu comme le composé de c avec le plongement $i_1 : h_1 \in H_1 \mapsto h_1 \otimes_D \mathrm{Id}_{W_2} \in \mathrm{Sp}(W)$. Dans le cas b), et en supposant que W_1 est scindé, la résolution du 2-cocycle c_1 est en tout point similaire à celle explicitée dans [Kud94, Th. 3.1] en choisissant des bases adaptées de W_1 et W_2. Il en va de même pour le cas a).

Il reste alors à considérer le cas b) quand W_1 n'est pas scindé. La technique de doublement effectuée dans [Kud94, Prop. 4.1] est encore valable. On la rappelle succinctement. On note $-W_1$ l'espace ε_1-hermitien $(W_1, -\langle , \rangle_1)$. Alors l'espace ε_1-hermitien $\mathbb{W}_1 = W_1 \oplus (-W_1)$ est scindé et $\mathbb{W} = (W_1 \otimes_D W_2) \oplus ((-W_1) \otimes_D W_2) = \mathbb{W}_1 \otimes_D W_2$ est un espace symplectique sur F. De plus, en posant $W = W_1 \otimes_D W_2$ et $-W = (-W_1) \otimes_D W_2$, on a une identification canonique entre $\mathrm{Sp}(W)$ et $\mathrm{Sp}(-W)$ en tant que sous-groupes de $\mathrm{GL}_F(W)$. Le morphisme naturel :

$$(u, u') \in \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{Sp}(W) \to u \oplus u' \in \mathrm{Sp}(\mathbb{W})$$

se relève aux groupes métaplectiques grâce la Proposition 3.22 pour $\mathbb{W} = W \oplus (-W)$, en choisissant des modèles des représentations métaplectiques S et S^- associées à $W_1 \otimes_D W_2$ et $(-W_1) \otimes_D W_2$ pour le même caractère ψ. Ce relevé s'écrit :

$$\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S^-}(-W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S\otimes S^-}(\mathbb{W}).$$

Son noyau étant $\{((\mathrm{Id}_W, \lambda \mathrm{Id}_S), (\mathrm{Id}_W, \lambda^{-1}\mathrm{Id}_{S^-})) \mid \lambda \in R^\times\}$, le sous-groupe $\widetilde{H}_{1,S} \times \{1\}$ s'injecte dans le groupe de droite.

La paire $(H_1', H_2') = (U((W_1 \oplus (-W_1)), U(W_2))$ est une paire duale irréductible de type I dans $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$. D'après le paragraphe précédent, le morphisme de groupes :

$$(h_1 \otimes \mathrm{Id}_{W_2}, M) \in \widetilde{H}_{1,S} \mapsto ((h_1 \otimes \mathrm{Id}_{W_S}) \oplus \mathrm{Id}_W, M \otimes \mathrm{Id}_{S^-}) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S\otimes S^-}(\mathbb{W})$$

est injectif. L'image de $\widetilde{H}_{1,S}$ est contenue dans $\widetilde{H}'_{1,S\otimes S^-}$, qui est un sous-groupe scindé car $W_1 \oplus (-W_1)$ est scindé et W_2 n'est pas orthogonal de dimension impaire. $\square$

Remarque 4.8. En toute généralité, il faut redoubler d'attention quand on se place sur un corps R qui est minimal. Par exemple, si $F = \mathbb{F}_3((t))$ et $R = \mathbb{Q}(j)$, il n'est pas garanti que tout relevé de paire duale qui tombe dans le cas b) soit scindée. En revanche, en considérant le corps $R' = \mathbb{Q}(j,i) = \mathbb{Q}(j,\sqrt{3})$, tout relevé l'est.

La remarque précédente délimite les cas potentiellement problématiques :

Corollaire 4.9. *On suppose exclu W_1 symplectique et W_2 orthogonal de dimension impaire.*

a) *Si -1 est un carré dans $F^\times$, alors $\widehat{H}_{1,S}$ est scindé ;*

b) *Si F est de caractéristique résiduelle 2, alors $\widetilde{H}_{1,S}$ est scindé ;*

c) *Si la paire est symplectique-orthogonale et $p \neq 2$, alors $\widehat{H}_{1,S}$ est scindé.*

Démonstration. a) Tout d'abord, la condition $-1 \in F^{\times 2}$ entraîne, d'après [CT13, 4], que l'image du facteur de Weil classique est à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Ainsi, les 2-cocyles c et $\hat{c}$ admettent des résolutions à valeurs dans $\{\pm 1\}$ en examinant les formules issues de [Kud94, Th. 3.1]. Cela signifie bien que $\widehat{H}_{1,S}$ est scindé. On remarque *a fortiori* que q admet bien une racine carrée. En effet, la situation se divise en trois cas. Soit q est une puissance impaire de $p \neq 2$, auquel cas $p \equiv 1[4]$ et R contient une racine carrée de p d'après un argument clasique sur les sommes de Gauss. Soit q est une puissance paire de $p \neq 2$, ce qui signifie que F contient l'unique extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{F}_p((t))$. Soit $p = 2$ et F contient le corps $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$.
b) Ensuite, si F est de caractéristique résiduelle 2, l'existence d'un caractère additif non trivial de F entraîne que R contient des racines carrées de -1 et 2. En particulier, il contient une racine carrée de q.
c) Si W_1 est orthogonal, alors W_2 est symplectique. En particulier, l'espace W_2 est scindé et on peut donc utiliser le Corollaire 4.6 en considérant $U(W_1)$ comme un sous-groupe d'un parabolique $P(W_1 \otimes_F X_2)$ où X_2 est un lagrangien de W_2.

Si W_1 est symplectique et W_2 est orthogonal de dimension paire, on sait alors qu'il existe une résolution du cocycle métaplectique à valeurs dans une extension R' de R contenant une racine carrée de q. En notant $\hat{c}_1$ le 2-cocycle métaplectique réduit sur $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes_F W_2)$ restreint à $H_1 = \mathrm{Sp}(W_1)$, on a une inclusion évidente $H_1 \times_{\hat{c}_1} R^\times$ dans $H_1 \times_{\hat{c}_1} R'^\times$. Or, le groupe H_1 est parfait, donc son image par un scindage à valeurs dans $H_1 \times_{\hat{c}_1} R'^\times$ est incluse dans le groupe dérivé $H_1 \times_{\hat{c}_1} \{\pm 1\}$, et donc incluse dans le sous-groupe $H_1 \times_{\hat{c}_1} R^\times$. Le scindage de $\widetilde{H}_{1,S}$ ainsi obtenu est donc défini sur R et à valeurs dans le groupe métaplectique réduit *i.e.* $\widehat{H}_{1,S}$ est scindé. De plus, ce scindage est l'unique scindage de $\widetilde{H}_{1,S}$ puisque le groupe symplectique est parfait. $\square$

Remarque 4.10. Un cas subsiste dans lequel on ne sait pas dire si le scindage est défini ou non pour un corps minimal R ou ne contenant pas de racine carrée de q. Il est le suivant. Quand p est impair et -1 est n'est pas un carré dans F – ceci implique que

$p \equiv 3[4]$, on ne sait pas dire si $\widetilde{H}_{1,S}$ est scindé ou non sur un corps R minimal quand D est quaternionique ou quadratique. On donne un exemple sous forme de question pour illustrer ce propos. Soit $F = \mathbb{F}_3((t))$ et $R = \mathbb{Q}(j)$. Soit W un espace symplectique de dimension 2 et $W = W_1 \otimes_D W_2$ une décomposition de W où W_1 et W_2 sont deux espaces unitaires de dimension 1, l'un hermitien et l'autre anti-hermitien, avec $D = E$ une extension quadratique de F. En posant $H_1 = U(W_1)$, a-t-on que $\widetilde{H}_{1,S}$ est scindé ?

5 En direction d'une correspondance thêta modulaire

Soit S un modèle de la représentation métaplectique sur R associée à ψ. Pour toute paire duale (H_1, H_2) dans $\mathrm{Sp}(W)$, la représentation de Weil modulaire $\omega_{\psi,S}$ du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ se restreint au produit $\widetilde{H}_{1,S} \times \widetilde{H}_{2,S}$ des relevés de ces paires duales, que l'on note encore $\omega_{\psi,S}$. Dans la Section 4, on donne des conditions sur ces relevés pour que la représentation $\omega_{\psi,S}$ se restreigne – ou non – en une vraie représentation de $H_1 \times H_2$, selon que ces relevés soient scindés ou non.

Pour éviter ces considérations portant sur des scindages, on étudie la représentation $\omega_{\psi,S}$ en considérant pour tout sous-groupe fermé H de $\mathrm{Sp}(W)$ la catégorie abélienne :

$$\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_S) = \{(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_R(\widetilde{H}_S) \mid \pi((\mathrm{Id}_W, \lambda \mathrm{Id}_S)) = \lambda \mathrm{Id}_V\}.$$

On en note $\mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_{1,S})$ les objets simples. En général, la contragrédiente de π appartient à $\mathrm{Rep}_R(\widetilde{H}_S)$ mais n'appartient pas à $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_S)$. Cependant, quitte à tensoriser par un caractère ou à considérer la catégorie $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_S)$ sur le relevé réduit $\widehat{H}_S$ comme dans la Proposition 3.21, on peut se servir d'une notion analogue à la contrégradiente de π dans $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_S)$. Aussi est-il plus adéquat de considérer la catégorie $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_S)$, ce qui ne change pas la teneur des énoncés en jeu puisque les catégories $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_S)$ et $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widetilde{H}_S)$ sont équivalentes.

Le Lemme B.11 formalise la définition de plus grand quotient isotypique pour une représentation irréductible donnée. Une simple application de ce lemme permet de définir, à l'aide d'une représentation irréductible du premier relevé, une représentation du second, connue sous le nom de Θ-lift.

Théorème 5.1. *Soient $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$ admissible et $D_1 = \mathrm{End}_{\widehat{H}_{1,S}}(\pi_1)$.*

Il existe alors une représentation $\Theta(\pi_1)$ dans $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{2,S})$, munie d'une structure de D_1-module à droite compatible avec sa structure de représentation, de sorte que le plus grand quotient π_1-isotypique $(\omega_{\psi,S})_{\pi_1}$ de $\omega_{\psi,S}$ soit isomorphe à $\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1$. De plus, en tant que $R[\widehat{H}_{1,S}] - D_1$-bimodule, le bimodule $\Theta(\pi_1)$ est unique à isomorphisme près.

Ce résultat est bien connu quand R est le corps des nombres complexes. Quand le corps R est algébriquement clos, ou que π_1 est absolument irréductible, le corps D_1 précédent est simplement R. La structure de D_1-module à droite correspond alors à la structure naturelle de R-module (à gauche) de la représentation $\Theta(\pi_1)$. En toute généralité, comme π_1 est admissible, on sait que le corps D_1 est une algèbre à division de dimension finie sur son centre, qui est une extension finie du corps central R.

On discutera dans la sous-section suivante des conjectures qui portent sur $\Theta(\pi_1)$ et qui constituent le cadre d'étude pour la « correspondance thêta module ». Ensuite, en se basant sur la Remarque 3.11 concernant les modèles explicites, les deux dernières sous-sections étudieront le comportement de $\Theta(\pi_1)$ vis-à-vis de l'extension des scalaires, ainsi que des possibilités de réduction des scalaires.

5.1 Définition de la correspondance modulaire et résultats connus

Dorénavant, le corps F est local non archimédien. Pour un panorama des résultats connus sur la correspondance thêta classique sur un corps local non archimédien – c'est-à-dire pour les représentations à coefficients complexes – et de ses contributeurs, on indique l'Annexe A. On rappelle simplement que, quand R est le corps des nombres complexes, les deux énoncés (Θ_2) et (Θ_3) ci-dessous constituent ce que l'on appelle communément la « correspondance thêta classique sur un corps local non archimédien ». Ils sont transposés ici pour les représentations à coefficients quelconques *i.e.* pour les représentations modulaires. On suppose toutefois que R est algébriquement clos.

Définition 5.2 (Correspondance modulaire)**.** Pour tout π_1 et π_1' dans $\mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$, on considère les assertions suivantes :

(Θ_1) la représentation $\Theta(\pi_1)$ est de longueur finie, donc admet un co-socle noté $\theta(\pi_1)$;

(Θ_2) soit $\Theta(\pi_1)$ est nulle, soit $\theta(\pi_1)$ est irréductible ;

(Θ_3) quand $\Theta(\pi_1) \neq 0$, on a $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$ si et seulement $\pi_1 \simeq \pi_1'$.

Quand ces trois énoncés sont valides, la « correspondance thêta R-modulaire sur un corps local non archimédien » est alors définie comme la bijection induite par θ entre les ensembles :

$$\{\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S}) \mid \Theta(\pi_1) \neq 0\} \overset{\theta}{\simeq} \{\pi_2 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{2,S}) \mid \Theta(\pi_2) \neq 0\}$$

où $\Theta(\pi_2)$ est obtenu en calculant les π_2-coinvariants vis-à-vis de $\widehat{H}_{2,S}$ au lieu de $\widehat{H}_{1,S}$, c'est-à-dire en inversant l'ordre des paires duales dans le Théorème 5.1.

État des connaissances. La question de déterminer la validité de ces énoncés en toute généralité constitue un problème difficile en soi qui dépasse largement l'objet ce travail. Cependant, on ne s'attend pas à ce que les trois énoncés précédents soient vrais en toute généralité *i.e.* sans condition plus précise sur la caractéristique ℓ de R vis-à-vis du pro-ordre des groupes H_1 et H_2 qui constituent la paire duale étudiée. Pour justifier cette remarque, on cite les résultats prouvés par A. Mínguez pour les paires duales de type II. On dit que la caractéristique d'un corps est banale si elle ne divise pas le pro-ordre des groupes qui sont en jeu.

Théorème 5.3 ([Mín06])**.** *Soit (H_1, H_2) une paire de type II dans un groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ avec F local non archimédien. Alors, si $R = \overline{\mathbb{F}_\ell}$ avec ℓ banal vis-à-vis des pro-ordres de H_1 et H_2, les énoncés (Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3) sont vrais pour toute représentation irréductible.*

Par conséquent, on ne peut parler de la correspondance thêta R-modulaire que dans le cadre de ce théorème, qui permet de considérer la bijection définie par θ entre les sous-ensembles donnés plus haut. Il développe également [Mín06, Sec. 4.5.2] un contre-exemple qui met en défaut (Θ_2), toujours pour les paires duales de type II, quand ℓ est non banal vis-à-vis des groupes H_1 et H_2. Son travail repose cependant sur l'utilisation d'un analogue *ad hoc* de la représentation de Weil pour ces paires-là en remplaçant les formules connues sur $\mathbb{C}$ pour ces modèles par des formules similaires sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$.

Le présent travail permet de définir un cadre complet d'étude pour les représentations à coefficients dans un corps R quelconque en généralisant les résultats connus pour les représentations à coefficients complexes, à savoir : le théorème de Stone-von Neumann ; le groupe métaplectique ; la représentation de Weil.

En ce qui concerne les paires duales de type I, étudier la validité des trois énoncés (Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3) constitue un problème complètement nouveau. Cependant, traiter de telles questions nécessiterait de nombreux développements qui dépassent le cadre ici présent, aussi repoussera-t-on cette étude aux articles qui feront suite. On s'attend à ce que ces énoncés (Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3) soient vrais quand $R = \overline{\mathbb{F}_\ell}$ avec ℓ suffisamment grand vis-à-vis des pro-ordres de la paire duale considérée. Néanmoins, la condition minimale sur ℓ pourrait se révéler plus forte qu'une simple hypothèse de banalité vis-à-vis de (H_1, H_2). Il existe également un contre-exemple à (Θ_2) pour les paires de type I en caractéristique non banale qu'on peut d'ores-et-déjà consulter [Tri19, Sec. 7.2].

5.2 Compatibilités à l'extension des scalaires

Le corps F est encore local non archimédien ici. On ne suppose pas dans ce paragraphe que le corps R est algébriquement clos. Si l'on fixe $\bar{R}$ une clôture algébrique de R, on peut donner des énoncés analogues sur R à ceux sur $\bar{R}$ du paragraphe précédent (Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3). Le but de ce paragraphe est de donner une compatibilité à l'extension des scalaires pour $\Theta(\pi_1)$; et de prouver ainsi que les énoncés analogues (Θ_1')-(Θ_2')-(Θ_3') sur R définis ci-dessous sont équivalents, en un sens que l'on va préciser, aux énoncés sur $\bar{R}$, à condition que R soit un corps parfait. On considère donc les trois énoncés suivants. Pour tout π_1 et π_1' dans $\mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$:

(Θ_1') le $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule $\Theta(\pi_1)$ est de longueur finie, on note $\theta(\pi_1)$ son co-socle ;

(Θ_2') soit $\Theta(\pi_1)$ est nulle, soit $\theta(\pi_1)$ est un $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule simple ;

(Θ_3') quand $\Theta(\pi_1) \neq 0$, on a $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$ si et seulement $\pi_1 \simeq \pi_1'$.

Remarque 5.4. Il est sous-entendu que l'isomorphisme $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$ dans (Θ_3') signifie en particulier que $D_1 = \mathrm{End}_{\widehat{H}_{1,S}}(\pi_1) \simeq \mathrm{End}_{\widehat{H}_{1,S}}(\pi_1')$.

Extension des scalaires. On suppose dorénavant que le corps R est un corps parfait. Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$. On considère la décomposition provenant du Théorème B.2 de l'extension des scalaires à $\bar{R}$:

$$\pi_1 \otimes_R \bar{R} \simeq m_1 \Big(\bigoplus_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})} w\rho_1 \Big)$$

où E_1 est le centre de D_1, la représentation $\rho_1 \in \mathrm{Rep}_{\bar{R}}^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$ est irréductible et son corps de rationalité $E(\rho_1)$ dans $\bar{R}$ est isomorphe à E_1.

Lemme 5.5. *On a un isomorphisme de représentations dans* $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(\widehat{H}_{1,S} \times \widehat{H}_{2,S})$ *:*

$$(\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_R \bar{R} \simeq \bigoplus_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R})} \Theta(w\rho_1) \otimes_{\bar{R}} w\rho_1.$$

De plus, en considérant $\Theta(\pi_1)$ *comme une représentation dans* $\mathrm{Rep}_{E_1}^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{2,S})$*, il existe une bijection* $\varphi : \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R}) \to \mathrm{Gal}_R(E_1,\bar{R})$ *telle que :*

$$\Theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R} \simeq m_1(\Theta(w\rho_1)).$$

Démonstration. En notant $S_{\bar{R}} = S \otimes_R \bar{R}$, il vient $\omega_{\psi,S}^R \otimes_R \bar{R} = \omega_{\psi,S_{\bar{R}}}^{\bar{R}}$. Le Théorème B.13, appliqué pour $V = \omega_{\psi,S}^R$, assure alors que :

$$(\omega_{\psi,S}^R)_{\pi_1} \otimes_R \bar{R} \simeq \bigoplus_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R})} (\omega_{\psi,S_{\bar{R}}}^{\bar{R}})_{w\rho_1}.$$

Par définition des membres de gauche et de droite, cela donne le premier isomorphisme de l'énoncé.

Ensuite, toute représentation $V_{\pi_1} \otimes_{E_1,w'} \bar{R}$ pour $w' \in \mathrm{Gal}_R(E_1,\bar{R})$ est isomorphe à une, et une seule, représentation $(V \otimes_R \bar{R})_{w\rho_1}$ pour $w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R})$. Cela définit donc la bijection φ.

Pour terminer, l'isomorphisme $(\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R} \simeq \Theta(w\rho_1) \otimes_{\bar{R}} w\rho_1$ induit l'isomorphisme recherché grâce au fait que $D_1' = D_1 \otimes_{E_1,\varphi(w)} \otimes \bar{R} \simeq M_{m_1}(\bar{R})$ et :

$$\begin{aligned}(\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R} &\simeq (\Theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R}) \otimes_{D_1'} (\pi_1 \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R}) \\ &\simeq (\Theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R}) \otimes_{D_1'} (m_1(w\rho_1)).\end{aligned}$$

□

Proposition 5.6. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *le* $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$*-bimodule* $\Theta(\pi_1)$ *est de longueur finie ;*

b) *toutes les représentations* $\Theta(w\rho_1)$ *sont de longueur finie ;*

c) *il existe* $w\rho_1$ *tel que* $\Theta(w\rho_1)$ *soit de longueur finie.*

Cela prouve que $(\Theta_1) \Leftrightarrow (\Theta_1')$.

Démonstration. Il suffit de montrer que a) $\Rightarrow$ b) et c) $\Rightarrow$ a), l'implication b) $\Rightarrow$ c) étant évidente.

Pour la première implication a) $\Rightarrow$ b), on remarque d'abord que si $\Theta(\pi_1)$ est un bimodule de longueur finie, alors $\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1$ est une représentation de longueur finie dans $\mathrm{Rep}_R(\widehat{H}_{1,S} \times \widehat{H}_{2,S})$. Ensuite, comme toute représentation irréductible de $\widehat{H}_{1,S} \times \widehat{H}_{2,S}$ est admissible d'après le Corollaire B.6, on déduit de l'exactitude de l'extension des scalaires à $\bar{R}$ et du Théorème B.2 que la représentation $(\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_R \bar{R}$ est de longueur finie dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(\widehat{H}_{1,S} \times \widehat{H}_{2,S})$. Le Lemme 5.5 permet de conclure que $\Theta(w\rho_1)$ est de longueur finie pour tout $w\rho_1$.

Pour la dernière implication c) $\Rightarrow$ a), on utilise encore le Lemme 5.5. L'égalité $\Theta(\pi_1) \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \bar{R} \simeq m_1(\Theta(w\rho_1))$ est compatible à l'action de $D_1 \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \bar{R} \simeq M_{m_1}(\bar{R})$ à droite, par conséquent, le bimodule $\Theta(\pi_1) \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \bar{R}$ est un $\bar{R}[\widehat{H}_{2,S}] - M_{m_1}(\bar{R})$-bimodule de longueur finie à condition que $\Theta(w\rho_1)$ soit une représentation de longueur finie dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(\widehat{H}_{2,S})$. Cela implique que $\Theta(\pi_1)$ est un $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule de longueur finie. $\square$

Proposition 5.7. *On suppose que $\Theta(\pi_1)$ est un $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule de longueur finie, dont on note $\theta(\pi_1)$ le co-socle. Quand $\Theta(\pi_1) \neq 0$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *le $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule $\theta(\pi_1)$ est irréductible ;*

b) *toutes les représentations $\theta(w\rho_1)$ sont irréductibles ;*

c) *il existe $w\rho_1$ tel que $\theta(w\rho_1)$ soit irréductible.*

Cela prouve que $(\Theta_2) \Leftrightarrow (\Theta'_2)$ si (Θ'_1) est vraie pour π_1.

Démonstration. Comme précédemment, l'implication b) $\Rightarrow$ c) est évidente.

Pour ce qui est de a) $\Rightarrow$ b), on prouve la contraposée. On suppose donc qu'il existe $w\rho_1$ telle que $\theta(w\rho_1)$ ne soit pas irréductible. Alors il existe τ_2 et τ'_2 deux représentations irréductibles dans $\mathrm{Rep}^{\mathrm{gen}}_{\bar{R}}(\widehat{H}_{2,S})$ telles que $\Theta(w\rho_1) \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1)$ admette la représentation $(\tau_2 \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1)) \oplus (\tau'_2 \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1))$ comme quotient.

D'une part, la représentation $\mathrm{Res}^R(\tau_2 \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1))$ est π_1-isotypique en tant que représentation de $\widetilde{H}_{1,S}$. D'après le Lemme B.11, il existe un $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule σ_2 tel que $\mathrm{Res}^R(\tau_2 \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1)) \simeq \sigma_2 \otimes_{D_1} \pi_2$. De plus, elle est semi-simple en tant que représentation dans $\mathrm{Rep}_R(\widehat{H}_{1,S} \times \widehat{H}_{1,S})$. Donc σ_2 est isotypique et on note π_2 un facteur irréductible quelconque de σ_2. Il en va de même pour τ'_2 avec des notations similaires σ'_2 et π'_2.

D'autre part, le Lemme 5.5 entraîne que $\Theta(w\rho_1) \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1) \simeq (\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \bar{R}$. Par suite, on déduit de l'inclusion évidente de $\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1$ dans le membre de droite que $\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1$ admet comme quotient $(\pi_2 \otimes_{D_1} \pi_1) \oplus (\pi'_2 \otimes_{D_1} \pi_1)$. Le noyau de ce quotient est de la forme $\sigma''_2 \otimes_{D_1} \pi_1$ où σ''_2 est un sous-$R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule de $\Theta(\pi_1)$ d'après le Lemme B.10. Par conséquent, ce quotient induit un quotient $\Theta(\pi_1) \to \pi_2 \oplus \pi'_2$ de $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodules dont le noyau est précisément σ''_2. D'où $\theta(\pi_1)$ n'est pas irréductible.

Enfin, pour l'implication c) $\Rightarrow$ a), on raisonne à nouveau par contraposée. On suppose donc que $\theta(\pi_1)$ n'est pas irréductible. Il s'agit de montrer que pour tout $w\rho_1$, la représentation $\theta(w\rho_1)$ n'est pas irréductible. Or, $\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1$ a pour quotient $\theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1$. Par conséquent, $(\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_R \bar{R}$ a pour quotient $(\theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_R \bar{R}$. Or la représentation $(\Theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \bar{R}$ admet comme quotient $(\theta(\pi_1) \otimes_{D_1} \pi_1) \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \pi_1$ et $\theta(\pi_1) \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \bar{R} = m_1(\theta(w\rho_1))$. D'où $\theta(w\rho_1)$ n'est pas irréductible puisque $\theta(\pi_1)$ ne l'est pas et l'exactitude de l'extension des scalaires donne que $\theta(\pi_1) \otimes_{E_{1,\varphi(w)}} \bar{R}$ est au moins de longueur $2m_1$. $\square$

Proposition 5.8. *On suppose que $\Theta(\pi_1)$ et $\Theta(\pi_1')$ sont deux $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodules de longueur finie dont les co-socles respectifs $\theta(\pi_1)$ et $\theta(\pi_1')$ sont irréductibles. On note ρ_1 et ρ_1' les représentations qui interviennent dans l'extension des scalaires à $\bar{R}$ de π_1 et π_1'. On suppose que $D_1 = \mathrm{End}_{\widehat{H}_{1,S}}(\pi_1) \simeq \mathrm{End}_{\widehat{H}_{1,S}}(\pi_1')$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$ en tant que $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodules ;*

b) *pour tout $w\rho_1$, il existe $w'\rho_1'$ tel que $\theta(w\rho_1) \simeq \theta(w'\rho_1')$;*

c) *il existe $w\rho_1$ et $w'\rho_1'$ tel que $\theta(w\rho_1) \simeq \theta(w\rho_1')$.*

Cela prouve que $(\Theta_3) \Leftrightarrow (\Theta_3')$ si (Θ_1') et (Θ_2') sont vraies pour π_1 et π_1'.

Démonstration. L'implication b) $\Rightarrow$ c) est toujours évidente.

En ce qui concerne a) $\Rightarrow$ b), l'isomorphisme $\theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R} \simeq m_1(\theta(w\rho_1))$ est un isomorphisme de $\bar{R}[\widehat{H}_{2,S}] - (D_1 \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R})$-bimodules. Un isomorphisme similaire est valable pour $\theta(\pi_1')$ et un certain $\theta(w'\rho_1')$. Si $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$, alors $\theta(w\rho_1) \simeq \theta(w'\rho_1')$ dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(\widetilde{H}_{2,S})$.

Pour la dernière implication c) $\Rightarrow$ a), il existe d'après le paragraphe précédent un isomorphisme $\theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R} \simeq \theta(\pi_1') \otimes_{E_1,\varphi'(w')} \bar{R}$ puisque $\theta(w\rho_1) \simeq \theta(w'\rho_1')$. Soit $w_0 \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})$. Alors $w_0(\theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w)} \bar{R}) \simeq \theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w_0 w)} \bar{R}$. En particulier, cela implique que $\theta(w_0 w\rho_1) \simeq \theta(w_0 w'\rho_1)$. Il existe donc une bijection ψ de $\mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})$ telle que pour tout $w_0 \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})$, on ait $\theta(w_0\rho_1) \simeq \theta(\psi(w_0)\rho_1')$. Ainsi, on a des isomorphismes $\bar{R}[\widehat{H}_{2,S}] - (D_1 \otimes_R \bar{R})$-bimodules :

$$\theta(\pi_1) \otimes_R \bar{R} \simeq \oplus_{w_0} \theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w_0)} \bar{R} \simeq \theta(\pi_1') \otimes_R \bar{R}.$$

Par restriction des scalaires, $\mathrm{Res}^R(\theta(\pi_1) \otimes_R \bar{R})$ est un $R[\widehat{H}_{2,S}] - D_1$-bimodule qui est à la fois $\theta(\pi_1)$-isotypique et $\theta(\pi_1')$-isotypique. Donc $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1')$. $\square$

En examinant les trois propositions précédentes 5.6-5.7-5.8, on obtient facilement le résultat suivant.

Théorème 5.9. *On rappelle que R est un corps parfait dont on fixe une clôture algébrique $\bar{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *(Θ_1')-(Θ_2')-(Θ_3') est vrai pour toute représentation irréductible dans $\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$;*

b) *(Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3) est vrai pour toute représentation irréductible dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$.*

Remarque 5.10. En particulier, cela signifie qu'il est suffisant de vérifier la validité des énoncés de la correspondance thêta locale pour les représentations à coefficients dans un corps algébriquement clos. Cela simplifie considérablement la situation considérée car dans ce cas on a toujours $D_1 = \mathrm{End}_{\widehat{H}_{1,S}}(\pi_1) = \bar{R}$.

Un exemple. Soit $\rho_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$. Soit K le corps des fractions de $\mathcal{A}$, qui est le corps de décomposition d'une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$, donc un sous-corps de $\mathbb{C}$. Alors d'après le Lemme B.4, il existe une unique représentation $\pi_1(\rho_1, K) \in \mathrm{Rep}_K^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_{1,S})$ irréductible telle que $\pi_1 \otimes_K \mathbb{C}$ contienne ρ_1. Pour tout $w \in \mathrm{Gal}_K(\mathbb{C})$:

$$\theta(w\rho_1) = \theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(ww_0)} \mathbb{C} \simeq w(\theta(\pi_1) \otimes_{E_1,\varphi(w_0)} \mathbb{C}) = w(\theta(\rho_1)).$$

5.3 Compatibilités à la réduction pour les paires de type I

Soit (H_1, H_2) une paire duale de type I dans $\mathrm{Sp}(W)$ avec F local non archimédien. Soit ℓ un premier qui ne divise pas le pro-ordre de H_1. Pour une extension algébrique k du corps fini $\mathbb{F}_\ell$, on note $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt et K le corps des fractions de $W(k)$. C'est un anneau local complet de caractéristique 0 d'idéal maximal (ℓ) et pour lequel on note $\mathfrak{r}_\ell : W(k) \to k$ la réduction modulo ℓ. On note R quand on veut signifier indistinctement un anneau parmi K, $W(k)$ et k.

Soit μ une mesure de Haar normalisée de H_1 à valeurs dans K. En particulier une telle mesure μ est à valeurs dans $W(k)$ puisque ℓ est banal. On note $\mathfrak{r}_\ell(\mu)$ sa réduction à valeurs dans k, qui est encore une mesure de Haar normalisée. Les algèbres de Hecke $\mathcal{H}_K(H_1)$ et $\mathcal{H}_{W(k)}(H_1)$ sont alors associées à la même mesure μ ; et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(H_1)$ associée à $\mathfrak{r}_\ell(\mu)$. On note génériquement $\mathcal{H}_R(H_1)$ ces algèbres. Pour les choix de mesures précédents, on a des morphismes d'algèbres évidents :

$$\mathcal{H}_{W(k)}(H_1) \hookrightarrow \mathcal{H}_K(H_1) \text{ et } \mathcal{H}_{W(k)}(H_1) \twoheadrightarrow \mathcal{H}_k(H_1).$$

Centre de Bernstein. Le centre de la catégorie $\mathrm{Rep}_R(H_1)$ s'identifie à la limite projective des centres des $\mathcal{H}_R(H_1, K_1)$ où K_1 parcourt les sous-groupes compacts ouverts de H_1 et les applications de transitions sont pour $K_1' \subset K_1$:

$$f \in \mathcal{H}_R(H_1, K_1') \mapsto e_{K_1} f e_{K_1} \in \mathcal{H}_R(H_1, K_1) = e_{K_1} \mathcal{H}_R(H_1, K_1') e_{K_1}$$

où e_{K_1} est l'idempotent associé à K_1. On écrira ainsi $e = (e(K_1))_{K_1}$ si e est un élément du centre de $\mathrm{Rep}_R(H_1)$, qu'on appelle aussi centre de Bernstein. En particulier l'unité du centre de Bernstein est $1 = (e_{K_1})_{K_1}$. Ces définitions dépendent du choix de la mesure de Haar sur H_1.

Idempotents centraux et décomposition. Soit S un sous-ensemble de $\mathrm{Irr}_R(H_1)$. On note $\mathrm{Rep}_R^S(H_1)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_R(H_1)$ dont les objets ont tous leurs sous-quotients irréductibles dans S. On dit qu'un sous-ensemble S de $\mathrm{Irr}_R(H_1)$ décompose $\mathrm{Rep}_R(H_1)$ si l'on a un produit de catégories :

$$\mathrm{Rep}_R(H_1) = \mathrm{Rep}_R^S(H_1) \times \mathrm{Rep}_R^{^cS}(H_1).$$

Il existe alors un (unique) idempotent central e_S dans le centre de $\mathrm{Rep}_R(H_1)$ qui donne la décomposition précédente *i.e.* de sorte que :

$$e_S \mathrm{Rep}_R(H_1) = \mathrm{Rep}_R^S(H_1) \text{ et } (1 - e_S)\mathrm{Rep}_R(H_1) = \mathrm{Rep}_R^{^cS}(H_1).$$

Réciproquement, tout idempotent central e du cetre de Bernstein induit une décomposition de la catégorie $\mathrm{Rep}_R(H_1)$. Par définition, une telle décomposition induit une partition à deux éléments de $\mathrm{Irr}_R(H_1)$. On dit qu'un idempotent central e est primitif si la catégorie $e\mathrm{Rep}_R(H_1)$ est une catégorie indécomposable. Ceci est équivalent au fait que e ne s'écrive pas comme somme de deux idempotents centraux. On dit qu'un sous-ensemble S non vide de $\mathrm{Irr}_R(H_1)$ définit un bloc dans $\mathrm{Rep}_R(H_1)$ si S décompose $\mathrm{Rep}_R(H_1)$ et s'il n'existe pas de sous-ensemble propre non vide de S qui décompose $\mathrm{Rep}_R(H_1)$. Enfin, l'idempotent central e_S est primitif si et seulement si S définit un bloc.

Représentations cuspidales. Soit $\Pi_1 \in \mathrm{Rep}_K(H_1)$ une représentation cuspidale absolument irréductible. Comme le centre de H_1 est compact, la représentation Π_1 est un objet projectif et injectif de la catégorie $\mathrm{Rep}_K(H_1)$. Le fait que Π_1 soit projective et injective se reformule en disant que $\{\Pi_1\}$ décompose $\mathrm{Rep}_K(H_1)$. De plus, la catégorie $\mathrm{Rep}_K^{\{\Pi_1\}}(H_1)$ est semi-simple puisque toutes les représentations sont Π_1-isotypiques et seule compte la multiplicité de Π_1. On note e_{Π_1} l'idempotent central primitif associé.

On définit le foncteur de réduction modulo ℓ pour les représentations à coefficients dans $W(k)$ à l'aide de $\mathfrak{r}_\ell : W(k) \to k$ et que l'on le note encore :

$$\mathfrak{r}_\ell : V \in \mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1) \mapsto V/\ell V = V \otimes_{W(k)} k \in \mathrm{Rep}_k(H_1).$$

Remarque 5.11. Ce foncteur n'est *pas* le foncteur usuel de réduction modulo ℓ, plutôt noté r_ℓ en général [Vig96, II.5.11.b]. On peut néanmoins obtenir r_ℓ pour les $W(k)$-réseaux admissibles en composant $\mathfrak{r}_\ell$ avec la semi-simplification pour les représentations dans $\mathrm{Rep}_k(H_1)$. Cependant, le foncteur r_ℓ présente le désavantage de n'être défini que pour les représentations entières et de supprimer toute information concernant les choix de réseaux. Il faut faire attention car, si $\Pi_1 \in \mathrm{Rep}_K(H_1)$ est entière, on a $\mathfrak{r}_\ell(\Pi_1) = 0$ alors que $r_\ell(\Pi_1)$ est une représentation semi-simple non nulle.

On suppose maintenant que H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts. Il en existe quand, par exemple, F est de caractéristique 0. D'après [Dat05, Cor. 6.10], tout $W(k)$-réseau stable de Π_1 se réduit modulo ℓ en une représentation cuspidale absolument irréductible, qui est unique à isomorphisme près. On la note π_1. En d'autres termes, si l'on considère Π_1 comme une représentation à coefficients dans $W(k)$, cela signifie que tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à π_1. Comme le centre de H_1 est compact et ℓ est banal vis-à-vis de H_1, la représentation π_1 est un objet projectif et injectif de la catégorie $\mathrm{Rep}_k(H_1)$. De même qu'au paragraphe précédent, le singleton $\{\pi_1\}$ décompose $\mathrm{Rep}_k(H_1)$. On note e_{π_1} l'idempotent central primitif associé.

Compatibilité des décompositions. On souhaite montrer que e_{Π_1} est dans le centre de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$ au sens où $e_{\Pi_1}(K_1)$ est dans le centre de $\mathcal{H}_{W(k)}(H_1, K_1)$ pour tout sous-groupe ouvert K_1 de H_1. Le morphisme d'algèbres donné par la réduction modulo ℓ :

$$\mathfrak{r}_\ell : \mathcal{H}_{W(k)}(H_1) \twoheadrightarrow \mathcal{H}_k(H_1)$$

induit un morphisme évident entre centres de Bersntein. On aimerait alors montrer que, si H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts, r_ℓ envoie $e_{\Pi_1}(K_1)$ sur $e_{\pi_1}(K_1)$ pour tout sous-groupe ouvert K_1 de H_1. Par conséquent, en notant $\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1}) = (e_{\pi_1}(K_1))_{K_1}$, cela entraînerait l'égalité :

$$\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1}) = e_{\pi_1}.$$

Lemme 5.12. *On suppose que F est de caractéristique résiduelle impaire. Alors pour tout sous-groupe ouvert compact K_1 de H_1 :*

$$e_{\Pi_1}(K_1) \in \mathcal{H}_{W(k)}(H_1, K_1).$$

Démonstration. Soit $\Pi_1^{K_1}$ l'ensemble des vecteurs K_1-invariants de Π_1. Alors $\Pi_1^{K_1}$ est un $\mathcal{H}_K(H_1, K_1)$-module qui est soit irréductible, soit nul. Comme Π_1 est admissible, on a toujours que $\Pi_1^{K_1}$ est de dimension finie sur K. Soit $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ une base de $\Pi_1^{K_1}$ sur K. On note $(v_i^\vee)_{i\in I}$ la base duale de $\mathcal{B}$ dans $(\Pi_1^\vee)^{K_1}$. La fonction :

$$e(K_1) : g \in H_1 \mapsto \sum_{i\in I} v_i^\vee(g^{-1}v_i) \in K$$

est K_1-bi-invariante. Elle est à support compact puisque le centre de H_1 est compact et que Π_1 est cuspidale, donc ses coefficients sont à support compact. Cette fonction appartient donc à $\mathcal{H}_K(H_1, K_1)$. Elle ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ et appartient au centre de $\mathcal{H}_K(H_1, K_1)$ d'après [Vig96, I.7.8 e)]. De plus, cette définition est compatible aux applications de transitions. On en déduit que $e = (e(K_1))_{K_1}$ est un élément du centre de Bernstein.

La représentation Π_1 est cuspidale. Comme le centre de H_1 est compact, son caractère central se factorise par le caractère d'un groupe fini. Ce caractère central est donc à valeurs dans $W(k)^\times$, ce qui entraîne que la représentation Π_1 est entière. Ainsi la fonction $e(K_1)$ définie précédemment est à valeurs dans $W(k)$. Donc e appartient au centre de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$.

L'élément e du centre de Bernstein n'est pas forcément un idempotent, mais on décrit maintenant comme le normaliser pour qu'il le soit. La représentation Π_1 étant projective, elle admet un degré formel. Par définition, le degré formel est un élément $d_{\Pi_1} \in K^\times$ qui normalise $e = (e(K_1))_{K_1}$ de sorte que $d_{\Pi_1}e = (d_{\Pi_1}e(K_1))_{K_1}$ soit un idempotent central. Tel que défini ici, le degré formel dépend du choix de la mesure normalisée μ qui définit le produit de convolution dans $\mathcal{H}_K(H_1)$. Cependant, il définit une unique classe dans $K^\times/W(k)^\times$. Par conséquent, s'il existe une mesure normalisée μ telle que $d_{\Pi_1} \in W(k)^\times$, alors le degré formel appartient à $W(k)^\times$ pour toute mesure normalisée. En particulier on a $e_{\Pi_1} = d_{\Pi_1}e$.

Le but est de prouver que e_{Π_1} appartient au centre de Bernstein de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $d_{\Pi_1} \in W(k)^\times$ puisque e appartient au centre de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$. Comme la caractéristique résiduelle de F n'est pas 2, toute représentation irréductible cuspidale a un type cuspidal [KS20] sur une clôture algébrique de K. Comme Π_1 est absolument irréductible, cela entraîne l'existence d'un sous-groupe compact ouvert J_1 de H_1 et d'une représentation absolument irréductible $\lambda_1 \in \mathrm{Rep}_K(J_1)$ tels que :

$$\Pi_1 \simeq \mathrm{ind}_{J_1}^{H_1}(\lambda_1).$$

Comme Π_1 est de plus projective, les degrés formels de Π_1 et de λ_1 sont égaux d'après [Vig96, I.8.4]. Or, le degré formel de λ_1 est celui d'une représentation d'un groupe fini J_1'

quotient de J_1. Donc le cardinal J_1' divise le pro-ordre de J_1. On a alors [Vig96, I.7.8.b)] en prenant pour μ la mesure normalisée sur J_1 :

$$d_{\lambda_1} = \dim_K(\lambda_1)$$

où $\dim_K(\lambda_1)$ divise le cardinal de J_1' puisque ℓ est banal et λ_1 est absolument irréductible. Donc $d_{\Pi_1} = \dim_K(\lambda_1) \in W(k)^\times$ puisque le cardinal de J_1' est inversible dans $W(k)$. □

Lemme 5.13. *On suppose que H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts et que la caractéristique résiduelle de F est impaire. On a une décomposition induite par e_{Π_1} :*

$$\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1) = e_{\Pi_1}\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1) \times (1 - e_{\Pi_1})\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1).$$

De plus e_{Π_1} est un idempotent central primitif du centre de Bernstein de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$ dont l'image par r_ℓ est e_{π_1}. On a enfin que $\{\pi_1\}$ décompose $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$ et :

$$e_{\Pi_1}\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1) = \mathrm{Rep}_{W(k)}^{\{\pi_1\}}(H_1)$$

est un bloc de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$.

Démonstration. On sait déjà que l'idempotent central e_{Π_1} appartient au centre de la catégorie $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$, ce qui induit la première décomposition de l'énoncé. Ensuite, le morphisme d'algèbres :

$$\mathfrak{r}_\ell : \mathcal{H}_{W(k)}(H_1) \twoheadrightarrow \mathcal{H}_k(H_1)$$

induit un morphisme entre centres de Bernstein via $e = (e(K))_K \mapsto \mathfrak{r}_\ell(e) = (\mathfrak{r}_\ell \circ e(K))_K$ où la fonction $\mathfrak{r}_\ell \circ e(K) \in \mathcal{H}_k(H_1, K_1)$ est l'image de $e(K) \in \mathcal{H}_{W(k)}(H_1, K_1)$ par la réduction modulo ℓ, que l'on note encore $\mathfrak{r}_\ell : W(k) \twoheadrightarrow k$.

Ensuite, soit L un réseau entier de Π_1. Alors $L^\vee$ est un réseau naturel de $\Pi_1^\vee$ et en choisissant une base $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ du $W(k)$-module L^{K_1}, la base duale de $\mathcal{B}$ est une base du $W(k)$-module $L^\vee$. Un rappel de la preuve précédente donne que la fonction :

$$e(K_1) : g \in H_1 \mapsto \sum_{i\in I} v_i^\vee(g^{-1}v_i) \in K$$

induit, à un facteur $d_{\Pi_1} \in W(k)^\times$ près, un idempotent central dans $\mathcal{H}_{W(k)}(H_1, K_1)$. Or $\mathfrak{r}_\ell(L) = \pi_1$ est une représentation cuspidale irréductible d'après [Dat05, Cor. 6.10]. De plus $L^{K_1} \otimes_{W(k)} k \simeq (L \otimes_{W(k)} k)^{K_1} = (\pi_1)^{K_1}$ car $\{1_{K_1}\}$ décompose $\mathrm{Rep}_K(H_1)$ et l'idempotent central associée $e_{1_{K_1}}$, de réduction $\mathfrak{r}_\ell(e_{1_{K_1}}) = e_{\mathfrak{r}_\ell(1_{K_1})}$, est dans le centre de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$.

Comme $\mathfrak{r}_\ell(L^\vee \otimes_{W(k)} L) \simeq \pi_1^\vee \otimes_k \pi_1$, on en déduit que :

$$\mathfrak{r}_\ell \circ e(K_1) : g \in H_1 \mapsto \mathfrak{r}_\ell\Big(\sum_{i\in I} v_i^\vee(g^{-1}v_i)\Big) = \sum_{i\in I} \mathfrak{r}_\ell(v_i^\vee)(g^{-1}\mathfrak{r}_\ell(v_i)) \in k$$

où $\mathfrak{r}_\ell(\mathcal{B}) = (\mathfrak{r}_\ell(v_i))_{i\in I}$ est une base de $(\pi_1)^{K_1}$, de base duale $(\mathfrak{r}_\ell(v_i^\vee))_{i\in I}$ dans $(\pi_1)^\vee$. Donc c'est à un facteur près l'idempotent central e_{π_1} de $\mathcal{H}_k(H_1, K_1)$ associé à la représentation cuspidale projective π_1. Or, si $d_{\Pi_1} \in W(k)^\times$ normalise e pour une certaine mesure normalisée μ, alors le facteur de normalisation de $\mathfrak{r}_\ell \circ e$ est $d_{\pi_1} = \mathfrak{r}_\ell(d_{\Pi_1}) \in k^\times$ pour la mesure normalisée $\mathfrak{r}_\ell(\mu)$. Ainsi $\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1}) = \mathfrak{r}_\ell(d_{\Pi_1} e) = d_{\pi_1}\mathfrak{r}_\ell(e) = e_{\pi_1}$.

Il est clair que e_{Π_1} est un idempotent central primitif du centre de $\mathrm{Rep}_K(H_1)$. Comme l'inclusion d'algèbres :

$$\mathcal{H}_{W(k)}(H_1) \to \mathcal{H}_K(H_1)$$

induit une inclusion des centres de Bernstein, on en déduit que e_{Π_1}, en tant qu'élément du centre de $\mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$, est primitif puisqu'il l'est dans le centre de $\mathrm{Rep}_K(H_1)$. $\square$

Proposition 5.14. *On suppose que H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts et que la caractéristique résiduelle de F est impaire. Soit $V \in \mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$. Alors pour tout $V \in \mathrm{Rep}_{W(k)}(H_1)$:*

$$\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1} V) = e_{\pi_1}\mathfrak{r}_\ell(V).$$

Remarque 5.15. On insiste sur le fait que le foncteur r_ℓ n'est pas exact à gauche. En effet, pour tout $W(k)$-réseau stable L_1 de Π_1, on a $\mathfrak{r}_\ell(L_1) = \pi_1$; alors que $\mathfrak{r}_\ell(\Pi_1) = 0$.

Démonstration. On a $\ell e_{\Pi_1} V = e_{\Pi_1}(\ell V)$ et le foncteur $V \mapsto e_{\pi_1} V$ est exact. Donc :

$$\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1} V) = e_{\Pi_1} V / \ell e_{\Pi_1} V = e_{\Pi_1}\mathfrak{r}_\ell(V).$$

Or, l'action naturelle de $W(k)$ sur $\mathfrak{r}_\ell(V)$ se factorise par k puisque $\ell(\mathfrak{r}_\ell(V)) = 0$. Ainsi :

$$e_{\Pi_1}\mathfrak{r}_\ell(V) = \mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1})(\mathfrak{r}_\ell(V)) = e_{\pi_1}\mathfrak{r}_\ell(V).$$

$\square$

Réduction modulo ℓ de la représentation de Weil. On rappelle que (H_1, H_2) est une paire duale de type I dans un groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ sur un corps local non archimédien F. Soit k un corps parfait de caractéristique ℓ tel qu'il existe un caractère additif non trivial de F. Soit ψ un caractère lisse non trivial de F à valeurs dans $W(k)$. Alors ψ est en particulier à valeurs dans K, et il se réduit en un caractère non trivial à valeurs dans k, encore noté ψ. On se permet cet abus de notation car le contexte est toujours clair.

Soit X un lagrangien de W. On note V_X^R le modèle de la représentation métaplectique à coefficients dans R associé à ψ et X, où $V_X^{W(k)}$ est défini dans la Remarque 3.11. On a des morphismes équivariants pour l'action du groupe d'Heisenberg :

$$V_X^{W(k)} \hookrightarrow V_X^K \text{ et } V_X^{W(k)} \twoheadrightarrow V_X^k$$

qui sont donnés par l'inclusion naturelle $W(k) \to K$ et le morphisme de réduction $\mathfrak{r}_\ell : W(k) \to k$. Le modèle de la représentation de Weil sur R associé à X est :

$$(\omega_{\psi, V_X^R}^R, V_X^R) \in \mathrm{Rep}_R(\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi, V_X}^K(W)),$$

où l'on considère ces représentations comme celles d'un même groupe $\widehat{\mathrm{Sp}}^K_{\psi,V_X}(W)$, conformément aux compatibilités définies dans la Remarque 3.11. En particulier, les morphismes précédents sont $\widehat{\mathrm{Sp}}^K_{\psi,V_X}(W)$-équivariants :

$$\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}} \hookrightarrow \omega^K_{\psi,V_X^K} \text{ et } \omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}} \twoheadrightarrow \omega^k_{\psi,V_X^k}.$$

Enfin, on note $\widehat{H}_1$ et $\widehat{H}_2$ les images réciproques de H_1 et H_2 dans $\widehat{\mathrm{Sp}}^K_{\psi,V_X}(W)$. Ainsi :

$$\omega^R_{\psi,V_X^R} \in \mathrm{Rep}_R(\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2).$$

Réduction de la correspondance thêta classique dans le cas banal. On suppose maintenant de plus que ℓ ne divise pas le pro-ordre de H_1. Quand $\widehat{H}_1$ et $\widehat{H}_2$ sont scindés sur H_1 et H_2, on a des équivalences de catégories :

$$\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_1) \simeq \mathrm{Rep}_R(H_1) \text{ et } \mathrm{Rep}_R^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_2) \simeq \mathrm{Rep}_R(H_2).$$

Ces catégories partagent donc les mêmes propriétés au sens suivant : une représentation dans $\mathrm{Rep}_R(\widehat{H}_1)$ est projective, respectivement injective ou cuspidale ou entière, si et seulement si son image dans $\mathrm{Rep}_R(H_1)$ l'est. En outre, les centres de ces catégories sont isomorphes. Quand les paires ne sont pas scindés, il faut remplacer partout H_1 par le relevé $\widehat{H}_1$, puis H_2 par $\widehat{H}_2$, mais la théorie reste la même car la théorie des types, du centre de Bernstein et le principe de Brauer Nesbitt se traitent identiquement.

Soit Π_1 une représentation cuspidale absolument irréductible dans $\mathrm{Rep}_K^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_1)$. En considérant Π_1 comme une représentation à coefficients dans $W(k)$, on note comme précédemment π_1 l'unique sous-quotient absolument irréductible de Π_1. En particulier π_1 est aussi une représentation cuspidale dans $\mathrm{Rep}_k^{\mathrm{gen}}(\widehat{H}_1)$. Un résultat bien connu du cas complexe [MVW87, Chap. 3, IV.4 Th. 1)a)] assure alors que la représentation $\Theta(\Pi_1)$ est irréductible quand elle est non nulle. Si de plus $\Theta(\Pi_1)$ admet un $W(k)$-réseau L stable par $\widehat{H}_2$, cette représentation est entière. Le principe de Brauer-Nesbitt impose alors que la semi-simplifiée de $\mathfrak{r}_\ell(L)$ est de longueur finie et ne dépend pas du choix de L.

Proposition 5.16. *On suppose que H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts et que la caractéristique résiduelle de F est impaire. On rappelle que ℓ est supposé banal vis-à-vis de H_1. Alors la représentation $\Theta(\Pi_1)$ est entière et les semi-simplifiées de $\mathfrak{r}_\ell(\Theta(\Pi_1))$ et $\Theta(\pi_1)$ sont isomorphes. En particulier, la représentation $\Theta(\pi_1)$ est de longueur finie.*

Démonstration. Comme la catégorie $\mathrm{Rep}_K^{\{\Pi_1\}}(\widehat{H}_1)$ est semi-simple, il vient :

$$\left(\omega^K_{\psi,V_X^K}\right)_{\Pi_1} \simeq e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K}.$$

Cette construction est compatible à l'action de $\widehat{H}_2$, donc cet isomorphisme est entre représentations de $\mathrm{Rep}_K(\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2)$. Comme Π_1 est absolument irréductible, en fixant un plongement de K dans $\mathbb{C}$, on a que $\Pi_1 \otimes_K \mathbb{C}$ est irréductible et :

$$\Theta(\Pi_1 \otimes_K \mathbb{C}) \simeq \Theta(\Pi_1) \otimes_K \mathbb{C}.$$

Les énoncés (Θ_1)-(Θ_2)-(Θ_3) étant valides sur $\mathbb{C}$, il vient que $\Theta(\Pi_1 \otimes_K \mathbb{C})$ est soit nulle soit irréductible. Donc cela implique que $\Theta(\Pi_1)$ est absolument irréductible quand elle est non nulle. Cela montre que $e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K} = \Theta(\Pi_1) \otimes_K \Pi_1$ est irréductible.

En voyant $e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K}$ comme une représentation à coefficients dans $W(k)$, le sous-module :

$$e_{\Pi_1}\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}} \in \mathrm{Rep}_{W(k)}(\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2)$$

est l'image de $\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}}$ par l'idempotent central e_{Π_1}, vu comme un élément du centre de Bernstein de la catégorie $\mathrm{Rep}_{W(k)}(\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2)$. Or :

$$\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1}\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}}) = e_{\pi_1}\mathfrak{r}_\ell(\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}}) = e_{\pi_1}\omega^k_{\psi,V_X^k} = \Theta(\pi_1) \otimes_k \pi_1.$$

Pour conclure, il s'agit maintenant de montrer que $e_{\Pi_1}\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}} \in \mathrm{Rep}_{W(k)}(\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2)$ est un $W(k)$-réseau stable de la représentation irréductible :

$$e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K} \simeq \Theta(\Pi_1) \otimes_K \Pi_1 \in \mathrm{Rep}_K(\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2).$$

L'anneau $W(k)$ est local, principal et complet ; la dimension sur K de la représentation $e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K}$ est dénombrable car elle est de longueur finie. D'après [Vig96, I.9.2], tout sous-$W(k)$-module stable de $e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K}$ qui ne contient pas de droite est $W(k)$-libre. Or $\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}}$ s'identifie à un espace de fonctions qui ne contient pas de droite. Comme e_{Π_1} est un idempotent central, on a :

$$\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}} = e_{\Pi_1}\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}} \oplus (1 - e_{\Pi_1})\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}}.$$

Donc $e_{\Pi_1}\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}}$ ne contient pas de droites. C'est donc bien un $W(k)$-réseau stable de la représentation $e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K}$, ce qui entraîne que la représentation irréductible $\Theta(\Pi_1)$ est entière.

Par le principe de Brauer-Nesbitt les semi-simplifiées des réductions modulo ℓ de tout $W(k)$-réseau stable de $e_{\Pi_1}\omega^K_{\psi,V_X^K}$ sont égales. En d'autres termes, pour tous $W(k)$-réseaux stables L_1 de Π_1 et $L_{\Theta(\Pi_1)}$ de $\Theta(\Pi_1)$, les semi-simplifiées de :

$$\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1}\omega^{W(k)}_{\psi,V_X^{W(k)}}) = \Theta(\pi_1) \otimes_k \pi_1 \text{ et } \mathfrak{r}_\ell(L_{\Theta(\Pi_1)} \otimes_{W(k)} L_1) = \mathfrak{r}_\ell(L_{\Theta(\Pi_1)}) \otimes_k \pi_1$$

sont isomorphes. On en déduit que les semi-simplifiées de $\mathfrak{r}_\ell(L_{\Theta(\Pi_1)})$ et $\Theta(\pi_1)$ sont isomorphes. Comme la première est de longueur finie [Vig96, II.5.11.a], cela est aussi vrai pour $\Theta(\pi_1)$. $\square$

On peut améliorer ce résultat dans le cas banal avec une condition sur $\Theta(\Pi_1)$.

Théorème 5.17. *On suppose que H_1 admet des sous-groupes discrets co-compacts et que la caractéristique résiduelle de F est impaire. On suppose que ℓ est banal vis-à-vis de H_1 et que $\Theta(\Pi_1)$ est une représentation cuspidale absolument irréductible. Alors $\Theta(\pi_1)$ est une représentation cuspidale absolument irréductible.*

Démonstration. D'après [Dat05, Cor. 6.10], la réduction modulo ℓ de tout $W(k)$-réseau stable de $\Theta(\Pi_1)$ est absolument irréductible et cuspidale. Donc la semi-simplifiée de $\mathfrak{r}_\ell(\Theta(\Pi_1))$ est une représentation cuspidale absolument irréductible, qui n'est autre que $\mathfrak{r}_\ell(\Theta(\pi_1))$ elle-même par irréductibilité. Par conséquent la Proposition 5.16 précédente entraîne que $\mathfrak{r}_\ell(\Theta(\Pi_1)) \simeq \Theta(\pi_1)$, d'où le résultat pour $\Theta(\pi_1)$. $\square$

Remarque 5.18. Dans les résultats précédents, on peut remplacer K par n'importe quelle extension algébrique finie totalement ramifiée L de K et $W(k)$ par l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ de K. En effet, en choisissant une uniformisante ϖ_L de $\mathcal{O}_L$, l'anneau $\mathcal{O}_L$ de L est encore principal, local et complet. De plus, on peut vérifier que [Dat05, Cor. 6.10] est toujours valable dans ce cadre.

Remarque 5.19. La difficulté principale quand on veut appliquer des arguments de réduction semble provenir du fait que l'on a besoin d'une description précise du plus grand quotient Π_1-isotypique :

$$\omega^K_{\psi,V^K_X} \twoheadrightarrow (\omega^K_{\psi,V^K_X})_{\Pi_1}.$$

Dans la présente section, cela a été traduit en termes d'action d'un élément e_{Π_1} du centre de Bernstein qui donne de bonnes compatibilités à la réduction. En toute généralité, pour espérer appliquer des arguments de réduction – *i.e.* pour passer de K à k – à la correspondance thêta, il paraît inévitable de devoir décrire plus explicitement la formation de ces Π_1-coinvariants. Plusieurs problèmes ouverts en ce sens sont les suivants. Comment traiter les cas où l'on relâche les conditions et où :

- k est un corps parfait de caractéristique ℓ ? Les preuves précédentes restent valables à condition de savoir que la correspondance thêta est valide sur tout corps de caractéristique 0. Grâce à la Section 5.2 néanmoins, ce résultat était déjà connu sur tout corps isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{C}$. Bien évidemment, quand k est une extension algébrique de $\mathbb{F}_\ell$, le corps K est isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- H_1 n'admet pas de sous-groupes discrets co-compacts ? Le résultat que l'on utilise de manière clé [Dat05, Cor. 6.10] repose sur ce point. La construction que l'on a présentée semble alors échouer. En effet, on ne sait même pas en général si toute représentation irréductible à coefficients dans k intervient comme sous-quotient de la réduction modulo ℓ d'un réseau stable d'une représentation irréductible à coefficients dans K, ce qui est précisément l'énoncé [Dat05, Lem. 6.8 i)].
- ℓ n'est pas banal vis-à-vis de H_1 ? Toujours dans [Dat05, Cor. 6.10], l'hypothèse de banalité est capitale. Néanmoins, on peut considérer une classe plus fine de représentations même si ℓ n'est pas banal, à savoir celles dont la réduction modulo ℓ de tout réseau reste irréductible et projective. On peut également étudier les

idempotents centraux primitifs e_{Π_1} qui ont « bonne réduction » modulo ℓ *i.e.* ceux à coefficients entiers dont la réduction est un idempotent central $\mathfrak{r}_\ell(e_{\Pi_1})$ non nul.

- F est de caractéristique résiduelle 2 ? Cette hypothèse est nécessaire pour calculer le degré formel à l'aide d'un argument de théorie des types [KS20] et montrer que les formules qui donnent l'idempotent central e_{Π_1} sont à coefficients entiers et se réduisent bien modulo ℓ. Une étude plus poussée de la caractéristique résiduelle 2 pourrait fonctionner puisque [Dat05, Cor. 6.10] est encore valable.
- Π_1 n'est pas cuspidale ? La stratégie présentée paraît échouer car elle repose de manière cruciale sur le fait que H_1 est à centre compact, et que les représentations irréductibles cuspidales sont alors projectives. Or cela est manifestement faux si l'on considère un Levi de H_1 puisque des facteurs de type GL interviennent.

Remarque 5.20. Dans la preuve de la Proposition 5.16, on invoque le principe de Brauer-Nesbitt pour montrer l'égalité entre semi-simplifiées de la réduction de deux réseaux. Peut-on décrire plus explicitement le réseau $e_{\Pi_1}\omega_{\psi,V_X^{W(k)}}^{W(k)}$? Par exemple, si l'on prouvait que le $W(k)$-réseau stable :

$$e_{\Pi_1}\omega_{\psi,V_X^{W(k)}}^{W(k)} \in \mathrm{Rep}_{W(k)}(\widehat{H}_1 \times \widehat{H}_2)$$

était de la forme $L_{\Theta(\Pi_1)} \otimes_{W(k)} L_1$, avec L_1 un $W(k)$-réseau stable de Π_1 et $L_{\Theta(\Pi_1)}$ un $W(k)$-réseau stable de $\Theta(\Pi_1)$, on aurait une égalité plus précise, à savoir :

$$\mathfrak{r}_\ell(L_{\Theta(\Pi_1)}) = \Theta(\pi_1).$$

A Contributions à la correspondance thêta locale classique

On donne un résumé succinct des contributions qui ont permis de prouver le Théorème 0.1, dont la résolution complète a nécessité près de 40 ans.

C'est R. Howe [How79] qui a d'abord conjecturé le Théorème 0.1 sous la forme que l'on présente, en introduisant de manière systématique la notion de paires duales réductives et en développant les travaux de A. Weil [Wei64]. Quand, par le passé, ce théorème n'était pas encore démontré, il portait le nom de conjecture de dualité locale de Howe. Cette conjecture de dualité était connue au moins pour les représentations non ramifiées [How79, 7-10]. Un premier succès significatif en direction d'une résolution plus générale est attribué à R. Howe lui-même [MVW87, Chap. 5] et provient d'une conférence qu'il a donnée en 1984 : il prouve à cette occasion que, quand la paire duale (H_1, H_2) est de type I non ramifiée et que la caractéristique résiduelle p de F est différente de 2, le Théorème 0.1 est vrai. Cette preuve met en jeu un modèle explicite de la représentation de Weil, le modèle latticiel, ce qui explique la restriction $p \neq 2$ apparaissant sur la caractéristique résiduelle.

En s'inspirant des idées de R. Howe sur la théorie invariante, S. Rallis a prouvé que pour toute paire duale (H_1, H_2) symplectique-orthogonale avec F de caractéristique 0 et satisfaisant aux conditions de [Ral84, Cor. to Th. II.4.1], le Théorème 0.1 était valide pour toutes représentations unitaires irréductibles π_1 et π_1'. L'argument crucial de cette preuve repose sur l'utilisation de la méthode dite de doubling, qui permet de ramener [Ral84, Prop. II.3.1] les problèmes à la compréhension des coinvariants, pour une certaine paire duale (H_1', H_2') dans $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ avec $\mathbb{W} = W + (-W)$, de la représentation de Weil associée à ψ dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Mp}(\mathbb{W}))$.

Dans le prolongement de ces avancées, S. Kudla [Kud86] a donné dans le cas des paires symplectiques-orthogonales une preuve partielle du point a) du Théorème 0.1. Quand la représentation π_1 est (super)cuspidale et la caractéristique de F est 0, il prouve le résultat plus fort suivant : la représentation $\Theta(\pi_1)$ est irréductible ou nulle. Ses arguments reposent sur l'utilisation d'un autre modèle explicite de la représentation de Weil : le modèle de Schrödinger mixte. Il s'inspire aussi du travail de Rallis en introduisant des méthodes récurrentes [Kud86, 5] pour le calcul des foncteurs de Jacquet de la représentation de Weil, qui donne accès au support cuspidal des quotients irréductibles de $\Theta(\pi_1)$ pour toute représentation π_1 irréductible.

Le livre [MVW87] est issu d'un séminaire, qui s'est tenu en 1985 et 1986, et qui était consacré aux représentations métaplectiques sur un corps p-adique. Il y est fait état des travaux de R. Howe, S. Rallis, S. S. Kudla, ainsi que R. Rao [RR93] [2] et P. Perrin [Per81] sur les cocycles métaplectiques. Plus qu'un simple exposé de ces travaux, les auteurs généralisent les méthodes employées en éliminant au maximum les restrictions sur la caractéristique de F ou sur la paire considérée. Par exemple ils généralisent, en suivant des intuitions attribuées à J.-L. Waldspurger [MVW87, Chap.3, IV.1], la méthode de doubling, l'irréductibilité pour les représentations cuspidales et le calcul du support cuspidal indépendamment de la caractéristique de F ou de la paire duale de type I considérées. Ce travail de mise en forme et de « polissage » [MVW87, Intro] de la théorie apporte également des contributions radicalement nouvelles. En effet, les résultats de [MVW87, Chap. 4, II.1] pour les groupes classiques non quaternioniques, maintenant connus sous le nom d'involution de MVW, présentent un intérêt plus large pour l'étude des représentations des groupes p-adiques.

Quand $p \neq 2$, il existe une preuve du Théorème 0.1 qui généralise à toute paire duale de type I la preuve pour les paires duales de type I non ramifiées. L'idée de départ, plutôt simple, trouve son origine chez R. Howe. Cependant, sa réalisation concrète a nécessité la traduction technique relativement complexe de J.-L. Waldspurger [Wal90]. Dans ce travail, l'auteur appelle de ses vœux à la mise au point d'une « démonstration plus claire et moins technique ». On signale par ailleurs dans le même ouvrage une preuve alternative de R. Howe pour les paires non ramifiées, avec toujours la restriction $p \neq 2$.

Depuis les années 80 cependant, le Théorème 0.1 était réputé vrai pour les paires duales de type II d'après des arguments de R. Howe – qui sont restés longtemps non publiés mais aujourd'hui retranscrits dans [Mín06, Ann. A]. Plus récemment par ailleurs, une nouvelle preuve de ce résultat a été élaborée par A. Mínguez [Mín08] et repose sur des idées inédites jusqu'alors. L'espoir fécond de traduire les idées de A. Mínguez pour les paires duales de type I a été réalisé par W. T. Gan et S. Takeda [GT16]. Ils démontrent

2. Ce travail a donné lieu à une publication tardive et existait bel et bien comme prépublication à l'époque de ce séminaire. Il est concomitant bien qu'indépendant à celui de P. Perrin.

le Théorème 0.1 pour toute paire duale de type I non quaternionique, avec le double avantage de n'avoir aucune restriction sur p et de présenter une preuve beaucoup plus simple que celles jusqu'alors. La restriction sur la paire duale de type I considérée repose sur l'utilisation de l'involution de MVW évoquée pus haut. Néanmoins, il existe une identité similaire pour les paires duales de type I quaternionique [SZ15], qui a permis à W. T. Gan et B. Y. Sun [GS17] de prouver le Théorème 0.1 dans le cas restant. Les deux arguments [GT16] et [GS17] font une utilisation extensive des filtrations de Rallis et Kudla, déjà généralisées à toute paire duale de type I dans [MVW87, Chap. 3, IV].

B Représentations d'un produit de groupes

Dans toute cette partie, R sera un corps. Soient G_1 et G_2 deux groupes localement profinis. Pour des représentations $(\pi_1, V_1) \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$ et $(\pi_2, V_2) \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$, on pose $D_1 = \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1)$ et $D_2 = \mathrm{End}_{G_2}(\pi_2)$. La représentation (π_1, V_1) est un D_1-module à gauche. Cette structure de module commute à la structure de $R[H_1]$-module à gauche, c'est-à-dire (π_1, V_1) est un $(D_1, R[H_1])$-bimodule à gauche. Il en va de même pour (π_2, V_2) qui est un $(D_2, R[H_2])$-bimodule à gauche.

B.1 Produit tensoriel et extension des scalaires

On suppose que les représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont irréductibles. En particulier, D_1 et D_2 sont des corps par le lemme de Schur.

Produit tensoriel. On applique [Bou12, A VIII.210, Th. 2] pour obtenir :

Lemme B.1. *Soient $V = V_1 \otimes_R V_2 \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ et $D = \mathrm{End}_{G_1 \times G_2}(V_1 \otimes_R V_2)$. Alors on a :*

$$D \simeq \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1) \otimes_R \mathrm{End}_{G_2}(\pi_2).$$

De plus, l'ensemble $\mathbb{V}$ des sous-représentations de V est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{D}$ des sous-D-modules à droite de D, grâce à l'application suivante qui est compatible à la relation d'inclusion :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{V} \\ D' & \mapsto & D'V \end{array}.$$

Extension des scalaires dans les corps parfaits. On rappelle la définition de l'action d'un élément de Galois sur une représentation donnée. Soient R' une extension algébrique de R et $w : R' \to R'$ un automorphisme de R-algèbres. En particulier, la restriction de w à R est l'identité. Pour toute représentation $(\rho_1, V_1') \in \mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_1)$, en choisissant une R'-base $(e_i)_I$ de V_1', on définit $(w\rho_1, V_1') \in \mathrm{Rep}'_R(G_1)$ par :

$$[w\rho_1(g_1)]_{i,j} = w([\rho_1(g_1)]_{i,j}) \text{ où } i, j \in I \text{ et } g_1 \in G_1.$$

Cette construction ne dépend pas du choix de la base $(e_i)_I$ au sens où la classe d'isomorphisme de telles représentations $(w\rho_1, V_1')$ est bien définie [Vig96, Chap. II, 4.1.a]. Par conséquent, cela a du sens de parler de $w\rho_1$ sans mentionner de choix de base.

Grâce au Lemme B.1 précédent, on va généraliser [Vig96, Chap. II, 4.4]. On fixe désormais une clôture algébrique $\bar{R}$ de R et on rappelle quelques notions développées dans [Vig96, Chap. II, 4].

Le corps de rationalité $E(\rho_1)$ d'une représentation ρ_1 dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_1)$ est défini comme le corps des invariants de $\bar{R}$ sous l'action de $H(\rho_1) = \{w \in \mathrm{Gal}_R(\bar{R}) \mid w\rho_1 \simeq \rho_1\}$:

$$E(\rho_1) = (\bar{R})^{H(\rho_1)}.$$

En particulier, l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}_R(\bar{R})$ sur les classes d'isomorphismes définies par ρ_1 se factorise par l'action du groupe $\mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})$, qui est défini comme l'ensemble des plongements R-linéaires de $E(\rho_1)$ dans $\bar{R}$.

Un sous-corps E de $\bar{R}$ est un corps de définition E pour ρ_1 s'il existe une représentation $\tau_1 \in \mathrm{Rep}_E(G_1)$ telle que $\tau_1 \otimes_E \bar{R} \simeq \rho_1$. On dit alors que ρ_1 est réalisable sur E. Quand le corps R est parfait, l'extension algébrique $\bar{R}/R$ est galoisienne, et on sait [Vig96, Chap. II, 4.1.c] qu'un corps de définition de ρ_1 contient toujours son corps de rationalité $E(\rho_1)$. La réciproque n'est pas vraie en toute généralité et échoue déjà pour les groupes finis.

Théorème B.2. *On suppose que R est un corps parfait et que π_1 est admissible. On adopte les notations suivantes :*

- *E_1 est le centre de D_1 avec $n_1 = [E_1 : R]$;*
- *m_1 est le degré de cette algèbre à division D_1 sur son centre E_1 ;*
- *$\mathrm{Gal}_R(E_1, \bar{R})$ est l'ensemble des plongements R-linéaires de E_1 dans $\bar{R}$.*

Alors pour tout facteur irréductible $\rho_1 \in \mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_1)$ de $\pi_1 \otimes_R \bar{R}$, il existe $w_1 \in \mathrm{Gal}_R(E_1, \bar{R})$ tel que $E(\rho_1) = w_1(E_1)$. Le choix d'un tel ρ_1 et w_1 induit un isomorphisme de représentations dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_1)$:

$$\pi_1 \otimes_R \bar{R} \simeq m_1 \left(\bigoplus_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})} w\rho_1 \right).$$

Pour terminer, en considérant π_1 comme une représentation dans $\mathrm{Rep}_{E_1}(G_1)$ via l'action du centre E_1 de son anneau des endomorphismes D_1, le plongement $ww_1 : E_1 \to \bar{R}$ pour $w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})$ induit un isomorphisme de représentations dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_1)$:

$$\pi_1 \otimes_{E_1} \bar{R} \simeq m_1(w\rho_1).$$

Démonstration. On va montrer qu'il existe une extension finie R' de R dans $\bar{R}$ pour laquelle ce résultat est déjà vrai. Le but est de prouver que la représentation $\pi_1 \otimes_R R'$ est somme de représentations absolument irréductibles qui ont même multiplicité et s'obtiennent comme des conjuguées l'une de l'autre. Tout d'abord, D_1 est une algèbre à division de centre E_1, qui est de dimension finie sur E_1 car π_1 est admissible. Il existe donc une extension (séparable) E_1' de E_1 de degré m_1 telle que $D_1 \otimes_{E_1} E_1' \simeq M_m(E_1')$.

En prenant la clôture galoisienne R' de toute image de E_1' dans $\bar{R}$, on peut voir R' comme une représentation irréductible du groupe $G_2 = \mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète.

En effet, grâce au théorème de l'élément primitif, il existe $\beta \in R'$ non nul de polynôme minimal P tel que $R' = R[\beta] \simeq R[X]/(P(X))$. La représentation $(\pi_2, R') \in \mathrm{Rep}_R(\mathbb{Z})$ définie par $\pi_2(1) = \beta \in \mathrm{GL}_R(R')$ est bien irréductible.

D'après le Lemme B.1, les sous-représentations de $\pi_1 \otimes_R \pi_2 = \pi_1 \otimes_R R'$ correspondent aux sous-D-modules à droite sur $D = \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1) \otimes_R R'$. Or :

$$D \simeq \prod_{1 \leq k \leq n_1} M_{m_1}(R').$$

D'après [Vig96, Chap. II, 4.2], la représentation $\pi_1 \otimes_R R'$ est semi-simple. Étant donné que $D = \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1 \otimes_R R')$ d'après le Lemme B.1, il existe des représentations irréductibles (τ_k) dans $\mathrm{Rep}_{R'}(G_1)$ qui sont deux à deux non isomorphes et telles que :

$$\pi_1 \otimes_R R' \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq n_1} (m_1 \tau_k).$$

De plus $\mathrm{End}_{G_1}(\tau_k) = R'$, donc chaque représentation τ_k est absolument irréductible. Par conséquent $\rho_k = \tau_k \otimes_{R'} \bar{R}$ est irréductible. Ainsi $\pi_1 \otimes_R \bar{R} = m_1(\bigoplus_{1 \leq k \leq n_1} \rho_k)$.

Il reste à montrer que $\mathrm{Gal}_R(E_1, \bar{R})$ agit simplement transitivement sur les n_1 classes d'isomorphismes définies par la famille (ρ_k). Tout d'abord $\mathrm{Gal}_R(E_1, \bar{R}) = \mathrm{Gal}_R(E_1, R')$ est de cardinal n_1 puisque R est parfait. Donc on peut considérer de manière équivalente, au lieu de $\bar{R}$ et (ρ_k), le corps R' et la famille (τ_k). Pour chaque $w \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')$, on va expliciter le facteur $M_{m_1}(R')$ correspondant dans la décomposition de D. Le centre de D est $E_1 \otimes_R R'$. En utilisant le théorème de l'élément primitif, il existe un polynôme unitaire $Q \in R[X]$ de degré n_1 et une racine $\alpha \in E_1$ de celui-ci tels qu'on ait :

$$E_1 = R[\alpha] \simeq R[X]/(Q(X))$$

De plus, le polynôme Q est scindé à racines simples dans $R'[X]$ car l'extension R' de R est galoisienne et contient une racine de Q.

Ainsi on a un isomorphisme d'anneaux :

$$E_1 \otimes_R R' \simeq \prod_{w \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')} R'[X]/(X - w(\alpha))$$

auquel est associé une unique décomposition $\sum_{w \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')} e_w = 1_{E_1 \otimes_R R'}$ de l'unité en somme d'idempotents, ici notée $(e_w)_w$. Pour $w \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')$, l'idempotent e_w vérifie :

$$e_w(\alpha \otimes_R 1_{R'} - 1_R \otimes_R w(\alpha)) = 0.$$

Avec ces notations e_w est un idempotent central de D, et on obtient explicitement l'isomorphisme :

$$D = \prod_{w \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')} e_w D \simeq \prod_{1 \leq k \leq n_1} M_{m_1}(R')$$

où le dernier isomorphisme dépend du choix d'une base.

Enfin, l'action de $\mathrm{Gal}_R(R')$ laisse invariante la représentation $\pi_1 \otimes_R \bar{R}$ au sens où pour tout $w \in \mathrm{Gal}_R(R')$, on a $w(\pi_1 \otimes_R R') \simeq \pi_1 \otimes_R R'$. Par conséquent, il existe un indice k tel que $w\tau_1 \simeq \tau_k$. Par définition du corps de rationalité, $w\tau_1 \simeq \tau_1$ si et seulement si $w|_{E(\tau_1)} = \mathrm{Id}_{E(\tau_1)}$. Et l'orbite de τ_1 est de cardinal $|\mathrm{Gal}_R(E(\tau_1), R')|$.

On va montrer qu'il existe $w_1 \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')$ tel que $E(\tau_1) = w_1(E_1)$, de sorte qu'on aura que le cardinal de l'orbite de τ_1 est n_1. Or :

$$e_w(\pi_1 \otimes_R R') \simeq \pi_1 \otimes_{E_1} R'$$

où π_1 est considérée à droite comme une représentation dans $\mathrm{Rep}_{E_1}(G_1)$ et le produit tensoriel est pris pour $w : E_1 \to R'$ avec $w \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')$. Les sous-représentations de $e_w(\pi_1 \otimes_R R')$ étant en bijection avec les sous-$e_w D$-modules à droite de $e_w D \simeq M_{m_1}(R')$, on en déduit que $\pi_1 \otimes_{E_1} R'$ est isotypique. Donc il existe $w_1 \in \mathrm{Gal}_R(E_1, R')$ tel que $e_{w_1}(\pi_1 \otimes_R R') \simeq m_1\tau_1 \simeq \pi_1 \otimes_{E_1} R'$. Ainsi $E(m_1\tau_1) = E(\tau_1) = E(\pi_1 \otimes_{E_1} R')$. Comme $E(\pi_1 \otimes_{E_1} R') \subset w_1(E_1)$, on a une première inclusion. Pour l'inclusion réciproque, l'image par $w \in \mathrm{Gal}_R(R')$ de $e_{w_1}(\pi_1 \otimes_R R')$ est isomorphe à $e_{ww_1}(\pi_1 \otimes_R R')$. De plus, $\{ww_1 \mid \mathrm{Gal}_R(R')\} = \mathrm{Gal}_R(E_1, R')$, donc l'action est transitive puisque tout $m_1\tau_k$ est obtenu comme un $e_{ww_1}(\pi_1 \otimes_R R')$. Ainsi pour tout $w \in \mathrm{Gal}_R(R')$ tel que $w|_{w_1(E_1)} \neq \mathrm{Id}_{w_1(E_1)}$, on a $w\tau_1 \not\simeq \tau_1$ *i.e.* $w_1(E_1) \subset E(\tau_1)$. Donc $w_1(E_1) = E(\tau_1)$ et l'orbite de τ_1 sous l'action de $\mathrm{Gal}_R(E(\tau_1), R')$ est de cardinal n_1 *i.e.* est la famille (τ_k). □

Remarque B.3. Bien que cela ne soit pas rendu explicite ici, il est possible de décrire le comportement de l'extension des scalaires quand R n'est pas parfait. Cela fait apparaître des extensions non triviales entre d'une représentation irréductible par elle-même. On a toujours une décomposition du type $\pi_1 \otimes_R \bar{R} = \sum_w \pi_1 \otimes_{E_1} R'$ où la somme porte sur les plongements $\mathrm{Gal}_R(E_1, \bar{R})$. En revanche, l'anneau $E_1 \otimes_R \bar{R}$ n'est plus nécessairement un produit de corps car il n'est pas réduit si E_1/R n'est pas séparable. Le Lemme B.1 étant encore valable, la décomposition sera donnée par les sous-$D_1 \otimes_R \bar{R}$-modules à droite de $D_1 \otimes_R \bar{R}$ où :

$$D_1 \otimes_R \bar{R} \simeq M_{m_1}(E_1 \otimes \bar{R}).$$

Par exemple si $R = \mathbb{F}_2(t)$, la représentation $(\pi_1, R^2) \in \mathrm{Rep}_R(\mathbb{Z})$ avec $\pi_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est irréductible. On a $D_1 \simeq \mathbb{F}_2(\sqrt{t})$. Mais pour l'extension algébrique $R' = \mathbb{F}_2(\sqrt{t})$, on obtient $D_1 \otimes_R R' \simeq R'[\varepsilon]$ où $\varepsilon^2 = 0$. Or $R'[\varepsilon]$ possède trois idéaux $(0) \subset (\varepsilon) \subset (1)$, donc la représentation $\pi_1 \otimes_R R'$ est de longueur 2 et n'est pas semi-simple. Sa semi-simplifiée est 2χ où $\chi : 1 \in \mathbb{Z} \mapsto \sqrt{t} \in R'$.

Lemme B.4. *On suppose que R est un corps parfait. Soit $\rho_1 \in \mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_1)$ une représentation irréductible admissible réalisable sur une extension finie de R. Il existe alors une représentation irréductible admissible $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$ unique à isomorphisme près telle que $\pi_1 \otimes_R \bar{R}$ contienne ρ_1 comme sous-quotient. On la note $\pi_1(\rho_1, R)$. De plus, si E un corps de définition de ρ_1 de degré minimal tel que $\tau_E \otimes_E \bar{R} = \rho_1$, on a en notant Res^R la restriction des scalaires à R :*

$$\pi_1(\rho_1, R) \simeq \mathrm{Res}^R(\tau_E).$$

Démonstration. On commence tout d'abord par l'unicité. Pour tout $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$ irréductible, la représentation $\mathrm{Res}^R(\pi_1 \otimes_R \bar{R})$ est π_1-isotypique. Ainsi, pour tout sous-quotient W de $\pi_1 \otimes_R \bar{R}$, la représentation $\mathrm{Res}^R(W)$ est π_1-isotypique. C'est en particulier vrai si le sous-quotient en question est ρ_1. Comme $\mathrm{Res}^R(\rho_1)$ est isotypique, cela entraîne l'unicité d'une telle représentation π_1 quand elle existe.

On réalise ensuite ρ_1 sur une extension finie E de R avec $\tau_E \otimes_E \bar{R} = \rho_1$. Il est clair que τ_E est admissible puisque ρ_1 l'est. Cela entraîne que $\mathrm{Res}^R(\tau_E)$ est admissible. Comme $\mathrm{Res}^R(\tau_E)$ est de type fini, elle admet un quotient irréductible π_1 *i.e.* un morphisme non nul $f : \mathrm{Res}^R(\tau_E) \to \pi_1$. Soit $\phi : R[G_1] \to E[G_1]$ l'inclusion évidente. Le foncteur d'oubli $\mathrm{Rep}_E(G_1) \to \mathrm{Rep}_R(G_1)$ admet un adjoint à droite qui est $\mathrm{Hom}_{R[G_1]}(E[G_1], -)$. Donc il correspond f par adjonction un morphisme non nul $f' : \tau_E \to \mathrm{Hom}_{R[G_1]}(E[G_1], \pi_1)$ donc f' est injective. Ainsi, $\mathrm{Res}^R(\tau_E)$ est une sous-représentation de :

$$\mathrm{Res}^R(\mathrm{Hom}_{R[G_1]}(E[G_1], \pi_1)) = \bigoplus_{[E:R]} \pi_1.$$

Donc $\mathrm{Res}^R(\tau_E)$ est π_1-isotypique de multiplicité finie. On en déduit que π_1 est admissible puisque $\mathrm{Res}^R(\tau_E)$ l'est et que le foncteur des invariants pour les sous-groupes compacts est exact à gauche. Donc $\pi_1 = \pi_1(\rho_1, R)$ existe et est admissible.

Il reste enfin à montrer l'assertion $\pi_1(\rho_1, R) \simeq \mathrm{Res}^R(\tau_E)$ si l'extension E/R est de degré minimal. On note simplement π_1 pour abréger $\pi_1(\rho_1, R)$. On a déjà montré au paragraphe précédent que $\mathrm{Res}^R(\tau_E)$ est π_1-isotypique de longueur finie. Il suffit par conséquent de montrer qu'elle est irréductible. On peut appliquer le Théorème B.2 précédent qui assure qu'il existe un sous-corps E_1' de E isomorphe au centre E_1 de $D_1 = \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1(\rho_1, R))$ tel que E/E_1' soit de degré m_1. On tire enfin des égalités :

$$\pi_1 \otimes_{E_1} E \simeq m_1 \tau_E \text{ et } \mathrm{Res}^R(\pi_1 \otimes_{E_1} E) = \oplus_{[E:E_1']} \pi_1 = m_1 \pi_1$$

que $m_1 \mathrm{Res}^R(\tau_E) \simeq m_1 \pi_1$ *i.e.* $\mathrm{Res}^R(\tau_E) \simeq \pi_1$. □

Remarque B.5. Conformément à la Remarque B.3, on peut développer ce résultat quand R n'est pas parfait. Il n'y a besoin d'aucune modification *a priori*, excepté qu'au lieu des facteurs $m_1 \tau_E$ il faut considérer un facteur A_{τ_E} de longueur m_1, qui peut contenir des extensions non triviales de τ_E par elle-même. En revanche, il est tout à fait possible que $A_{\tau_E} \simeq \pi_1 \otimes_{E_1} E$ ne soit pas semi-simple alors que $\mathrm{Res}^R(A_{\tau_E})$ l'est toujours.

Corollaire B.6. *Soit G un groupe réductif (connexe) sur un corps local non archimédien. On suppose que R est un corps parfait et que G contient un sous-groupe compact ouvert de pro-ordre inversible dans R. Alors toute représentation irréductible dans* $\mathrm{Rep}_R(G)$ *est admissible.*

Démonstration. On applique le Lemme B.4 précédent. D'une part, toute représentation irréductible ρ_1 dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G)$ est admissible. Ce fait bien connu [Vig96, Chap. II, 2.8] provient de ce que cela est vrai pour les représentations cuspidales. D'autre part, toute représentation irréductible ρ_1 dans $\mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G)$ peut se réaliser sur une extension finie de R d'après [Vig96, Chap. II, 4.7].

Si le groupe réductif en question n'est pas connexe, on sait qu'il admet un quotient fini par sa partie connexe. On peut résonner de manière similaire sur les représentations cuspidales de ses sous-groupes de Levi. □

Remarque B.7. Toujours dans le même esprit que les remarques précédentes, ce résultat semble aussi valable quand R n'est pas parfait.

B.2 Plus grand quotient π_1-isotypique

On suppose dans cette section qu'il existe un sous-groupe compact ouvert de $G_1 \times G_2$ de pro-ordre inversible dans R, ce qui assure l'existence d'une mesure de Haar sur $G_1 \times G_2$ à valeurs dans R. En particulier, il existe des mesures de Haar sur G_1 et G_2 à valeurs dans R. Le théorème suivant généralise les résultats de [Fla79] pour les représentations à coefficient complexes $R = \mathbb{C}$, dont [Vig01, Th. A.4] est déjà une généralisation au cas R algébriquement clos.

Théorème B.8. *On suppose que R est un corps parfait.*

a) *Si $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$ et $\pi_2 \in \mathrm{Rep}_R(G_2)$ sont deux représentations irréductibles admissibles, alors $\pi_1 \otimes_R \pi_2 \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ est une représentation semi-simple admissible.*

b) *Si π est une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$, alors il existe des représentations irréductibles admissibles π_1 de G_1 et π_2 de G_2 telles que π soit un quotient de $\pi_1 \otimes_R \pi_2$. De plus, π_1 et π_2 sont uniques à isomorphisme près c'est-à-dire π détermine ces classes d'isomorphisme.*

Démonstration. a) Grâce au Lemme B.1, il suffit de prouver que la R-algèbre suivante $D = \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1) \otimes_R \mathrm{End}_{G_2}(\pi_2)$ est semi-simple. Comme elle est de dimension finie sur R par admissibilité, il suffit de prouver que son centre est réduit. Or, son centre est $E_1 \otimes_R E_2$ en notant E_1 et E_2 respectivement les centres de ces algèbres d'endomorphismes. Comme R est parfait, ces extensions finies E_1 et E_2 sont séparables, ce qui assure que le centre est réduit.

b) Pour le deuxième point, soit $W \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ une représentation irréductible admissible. Soit $K = K_1 \times K_2$, où K_i est un sous-groupe compact ouvert de G_i de pro-ordre inversible dans R et tel que $W^K \neq 0$. L'espace W^K est de dimension finie, et irréductible en tant que $\mathcal{H}_R(G_1 \times G_2, K)$-module, ce qui permet d'appliquer les résultats de [Bou12, A VIII.208]. Il existe donc un couple, unique à isomorphisme près, de $\mathcal{H}_R(G_i, K_i)$-modules simples $W_i^{K_i}$ et un morphisme non nul (donc surjectif ...) $a_K : W_1^{K_1} \otimes_R W_2^{K_2} \to W^K$ de $\mathcal{H}_R(G_1 \times G_2, K)$-modules de sorte que W^K soit un quotient $W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2}$. De même pour tout sous-groupe ouvert $K' = K'_1 \times K'_2$ inclus dans K, on peut construire un morphisme $a_{K'} : W_1^{K'_1} \otimes_R W_2^{K_2} \to W^{K'}$ pour deux modules simples $W_1^{K'_1}$ et $W_2^{K'_2}$. Il existe alors un morphisme :

$$b_i(K, K') \in \mathrm{End}_{\mathcal{H}_R(G_1,K_1) \otimes \mathcal{H}_R(G_2,K_2)}(W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2}, W_1^{K'_1} \otimes W_2^{K'_2})$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
W^K \arrow[d, hook, "\text{incl.}"] & W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2} \arrow[l, "a_K"'] \arrow[d, "b_{K,K'}"] \\
W^{K'} & W_1^{K_1'} \otimes W_2^{K_2'} \arrow[l, "a_{K'}"']
\end{tikzcd}$$

De plus, les morphismes $b_{K,K'}$ peuvent être choisis de sorte que les sous-groupes compacts ouverts précédents K, K' forment un système inductif. Alors W est un quotient de la représentation $W_1 \otimes_R W_2$ où :

$$W_i = \varinjlim_{K_i} W_i^{K_i} \in \mathrm{Rep}_R(G_i) \text{ est irréductible admissible.}$$

La classe de W_i est déterminée par celle de W. En effet, deux représentations W et W' sont isomorphes si et seulement si pour tout compact ouvert K de pro-ordre inversible $W^K \simeq (W')^K$. La restriction de W à G_i est donc W_i-isotypique car $W_i^{K_i}$ est unique à isomorphisme d'après [Bou12, A VIII.208]. □

On peut donner une condition un peu plus fine pour qu'un produit tensoriel de représentations irréductibles soit irréductible.

Lemme B.9. *On suppose que les représentations π_1 et π_2 sont irréductibles et qu'il existe un morphisme non nul de R-algèbres $D_2 \to D_1^{\mathrm{op}}$. Alors $\pi_1 \otimes_{D_2} \pi_2 \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ est une représentation irréductible.*

Démonstration. Soit $v = \sum v_1^i \otimes_{D_2} v_2^i \in \pi_1 \otimes_{D_2} \pi_2$. Comme $D_2 = \mathrm{End}_{G_2}(\pi_2)$ est un corps, on peut choisir une famille finie v_2^i de sorte que celle-ci soit libre sur D_2 et qu'on ait $v = \sum v_1^i \otimes_{D_2} v_2^i$ avec $v_1^i \neq 0$. On va montrer que $V_1 \otimes_{D_2} v_2^1$ est contenu dans la sous-représentation engendrée par v, ce qui suffit pour prouver que v engendre $\pi_1 \otimes_{D_2} \pi_2$. Pour ce faire, on choisit un élément $f_2 \in R[G_2]$ de sorte que :

$$\pi_2(f_2) v_2^i = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ v_2^1 & \text{si } i = 1 \end{array} \right. .$$

Un tel élément existe toujours. En effet, on note A l'image de $R[G_2] \to \mathrm{End}_R(\pi_2)$. Alors A est contenue dans $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_{G_2}(\pi_2)}(\pi_2) = \mathrm{End}_{\mathrm{comm}(A)}(\pi_2) = \mathrm{comm}(\mathrm{comm}(A))$ où « comm » désigne le commutant d'une algèbre dans $\mathrm{End}_R(\pi_2)$. On considère le sous-espace vectoriel W_2 de π_2 engendré par les v_2^i. L'application que l'on veut interpoler est la projection sur v_2^1 parallèlement aux autres v_2^i. En particulier, il existe un élément $b \in \mathrm{End}_{D_2}(\pi_2) = \mathrm{comm}(\mathrm{comm}(A))$ dont la restriction $b|_{W_2}$ à W_2 réalise cette projection. Comme la famille v_2^i est finie, le Théorème de Densité [Vig96, Chap. I, B.6] assure qu'il existe $a \in A$ tel que $a|_{W_2} = b|_{W_2}$. D'où l'existence de f_2. On en déduit donc que $V_1 \otimes_{D_2} v_2^1$ est contenu dans la sous-représentation engendrée par v. □

Les deux lemmes suivants généralisent [MVW87, Chap. 2, Lem. III.3 & Lem. III.4]. Les modifications apportées aux preuves sont mineures, mais on les reprend en détail pour insister sur ces légers changements.

Lemme B.10. *Soit* $(\pi_1, V_1) \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$ *une représentation irréductible et admissible. Soit* $(\pi_2, V_2) \in \mathrm{Rep}_R(G_2)$*. On suppose que* V_2 *est munie d'une structure de module à droite sur* D_1 *compatible à l'action de* G_2*, cela signifie qu'on se donne un morphisme non nul :*

$$D_1 \to D_2^{\mathrm{op}}.$$

Alors, pour toute sous-représentation $V \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ *dans* $V_2 \otimes_{D_1} V_1$*, il existe une sous-représentation* V_2' *de* V_2*, munie d'une structure de* D_1*-module à droite, telle que* $V = V_2' \otimes_{D_1} V_1$ *dans* $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$*.*

Démonstration. Posons $V_2' = \{v_2 \in V_2 \mid \forall v_1 \in V_1, v_2 \otimes v_1 \in V\}$. Cet espace est stable par G_2 et par l'action à droite de D_1. La représentation $V_2' \otimes V_1$ est une sous-représentation de V. On va montrer que V est contenu dans $V_2' \otimes V_1$. Soit $v \in V$. On emploie le même argument que celui de la preuve du Lemme B.9. On le rappelle en raccourci. Par définition, il existe une famille finie (v_1^i) libre sur le corps D_1 telle que $v = \sum_i v_2^i \otimes v_1^i$ et $v_2^i \neq 0$. On peut alors trouver un élément dans $f_1^i \in R[G_1]$ tel que :

$$\pi_1(f_1^i)v_1^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ v_1^i & \text{si } j = i \end{cases}.$$

Ainsi, $v_2^i \in V_2'$ pour tout i, donc $v = \sum v_2^i \otimes v_1^i \in V_2' \otimes V_1$. □

Quand le corps R est algébriquement, les résultats se simplifient considérablement puisque les anneaux d'endomorphismes D_1 et D_2 sont égaux à R. L'expression de V_2 dans le résultat suivant se simplifie également en $(V \otimes V_1^\vee)_{1_{G_1}}$ qui correspond bien à une généralisation du plus grand quotient π_1-isotypique dans le cas complexe.

Lemme B.11. *Soit* $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$*. Soit* $(\pi_1, V_1) \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$ *irréductible admissible.*

- *On définit une sous-représentation de* V *par :*

  $$V[\pi_1] = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1)} \mathrm{Ker}(f) \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2).$$

  On appelle « plus grand quotient π_1-isotypique de V » *la représentation :*

  $$V_{\pi_1} = V/V[\pi_1] \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2).$$

- *Il existe alors un* $\mathcal{H}_R(G_2) - D_1$*-bimodule* (π_2, V_2)*, unique à isomorphisme de bimodule près, tel que :*

  $$V_{\pi_1} \simeq \pi_2 \otimes_{D_1} \pi_1.$$

  De plus, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}_R(G_2) - D_1$*-bimodule :*

  $$V_2 \simeq (V \otimes_R \mathrm{Hom}_{D_1}(V_1, D_1)^\infty)_{1_{G_1}}.$$

Démonstration. Le groupe G_2 agit de manière évidente sur $\mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1)$, donc sur $V[\pi_1]$ *a fortiori*. On a bien $V[\pi_1]$ et V_{π_1} qui sont des représentations de $G_1 \times G_2$. Pour l'unicité de V_2, on va montrer que si V_2 existe, alors $V_2 \simeq (V \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}}$ où l'on a pris les coinvariants vis-à-vis de G_1 et la représentation $\pi_1' = \mathrm{Hom}_{D_1}(V_1, D_1)^\infty$ est non réduite à 0. La structure de D_1-module à droite sur $(V \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}}$ est héritée de celle sur π_1'. On suppose donc qu'on a un isomorphisme $V_{\pi_1} \simeq V_2 \otimes_{D_1} V_1$ dans $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$. Le morphisme quotient $V \to V_{\pi_1}$ induit un isomorphisme $(V \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}} \simeq (V_{\pi_1} \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}}$ puisque $V[\pi_1] \otimes_R \pi_1'$ est inclus dans $(V_{\pi_1} \otimes_R \pi_1')[1_{G_1}]$. D'une part, comme π_1 est admissible, on peut montrer que $(\pi_1')' \simeq \pi_1$ en tant que $(\mathcal{H}_R(G_1) \otimes_R D_1)$-module. D'autre part, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V \otimes_R \pi_1', 1_{G_1})$, on a $v \in V \mapsto (v_1' \mapsto f(v \otimes_R v_1')) \in V_1$ qui appartient à $\mathrm{Hom}_{G_1}(V, \pi_1)$. Donc si $v \in V[\pi_1]$, pour tout $v_1' \in V_1'$, on obtient bien que $f(v \otimes_R v_1') = 0$. Maintenant, si $V_{\pi_1} \simeq \pi_2 \otimes_{D_1} \pi_1$, alors :

$$(V \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}} = (V_{\pi_1} \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}} = V_2 \otimes_{D_1} (\pi_1 \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}} = V_2$$

la dernière égalité résulte d'un argument classique car $(\pi_1 \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}}$ est un D_1-module à gauche de dimension 1. En effet, en procédant comme dans [Ren09, III.1.9], on un isomorphisme de R-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_R(G_1) \otimes_R D_1}(\pi_1 \otimes_R \pi_1', 1_{G_1,D_1}) \simeq \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1')$ où $1_{G_1,D_1}$ désigne la « représentation triviale » *i.e.* un D_1-espace vectoriel de dimension 1 muni de l'action triviale de G_1. Comme $\mathrm{End}_{G_1}(\pi_1')$ est un D_1-espace vectoriel de dimension 1, le dual de $(\pi_1 \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}}$ est de dimension 1 sur D_1. D'où le fait que $(\pi_1 \otimes \pi_1')_{1_{G_1}}$ soit de dimension 1.

En ce qui concerne l'existence de V_2, il suffit de montrer que V_{π_1} est une sous-représentation d'une représentation de la forme $V_2' \otimes_{D_1} \pi_1$ et utiliser le lemme précédent. On pose $V_2 = (V \otimes_R \pi_1')_{1_{G_1}}$ et on désigne par p le morphisme quotient $V \otimes_R \pi_1' \to V_2$ associé aux coinvariants vis-à-vis de G_1. Soit ϕ l'application R-linéaire :

$$\phi : v \in V \mapsto (\phi(v) : v_1' \mapsto p(v \otimes_R v_1')) \in \mathrm{Hom}_{D_1}(V_1', V_2).$$

Elle est un morphisme de représentations de $G_1 \times G_2$ et se factorise par V_{π_1}. On va montrer que l'image de $\phi(v)$ est de dimension finie. Soient $v \in V$ et K un sous-groupe ouvert compact de G_1 de pro-ordre inversible dans R fixant v. Soit e_K l'idempotent associé dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G_1)$. Pour $v_1' \in V_1'$, on a :

$$\phi(v)(v_1') = p(v \otimes_R v_1') = p(\pi(e_K)v \otimes_R v_1') = p(v \otimes_R \pi_1'(\check{e_K})v_1)$$

où $\check{e_K}$ est l'image de e_K par l'automorphisme $g \mapsto g^{-1}$. Mais $\check{e_K} = e_K$, ce qui entraîne que $\phi(v)(v_1') = \phi(v)(\pi_1'(\check{e_K})v_1')$. Autrement dit $\phi(v)$ se factorise par $\pi_1'(e_K)$. On a un plongement naturel $V_2 \otimes_{D_1} V_1 \to \mathrm{Hom}_{D_1}(V_1', V_2)$. L'admissibilité de π_1 implique que son image est le sous-espace des $f \in \mathrm{Hom}_{D_1}(V_1', V_2)$ tel qu'il existe un sous-groupe ouvert compact K de G_1 de pro-ordre inversible pour lequel f se factorise par $\pi_1'(e_K)$. Alors ϕ se factorise par $\phi' : V_{\pi_1} \to V_2 \otimes_{D_1} V_1$.

Il reste à montrer que ϕ' est injective pour conclure. Soit $v \in V_{\pi_1}$, $v \neq 0$. Il existe par hypothèse $f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V_{\pi_1}, \pi_1)$ tel que $f(v) \neq 0$. Fixons un tel f et $v_1' \in V_1'$ tels que $v_1' \circ f(v) \neq 0$. Par fonctorialité, f définit un morphisme de D_1-modules à droite :

$$f' : (V \otimes_R V_1')_{G_1} \to (V_1 \otimes_R V_1')_{1_{G_1}}.$$

En composant avec $h : v_1 \otimes_R v_1' \in V_1 \otimes_R V_1' \mapsto v_1'(v_1) \in 1_{G_1,D_1}$, qui se factorise par $(V_1 \otimes V_1')_{1_{G_1}}$, on obtient que $h \circ f' \circ p(v \otimes_R v_1') = v_1' \circ f(v) \neq 0$ et donc $p(v \otimes_R v_1') \neq 0$. Par conséquent $\phi(v + V[\pi_1]) \neq 0$ et ϕ' est injective. Comme énoncé plus haut, V_{π_1} est une sous-représentation de $V_2 \otimes_{D_1} V_1$ et le lemme précédent donne l'existence de (π_2, V_2). $\square$

Corollaire B.12. *Soit* $(\pi_{1,i})_{i \in I}$ *une famille finie de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes. Pour* $V \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$*, on note* $p_{\pi_{1,i}}$ *la projection* $V \mapsto V_{\pi_{1,i}}$*. Alors l'application :*

$$p_I : v \in V \mapsto (p_{\pi_{1,i}}(v))_{i \in I} \in \oplus_{i \in I} V_{\pi_1^i}$$

est surjective de noyau :

$$\bigcap_{i \in I} V[\pi_{1,i}] = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V, \oplus_{i \in I} \pi_{1,i})} \mathrm{Ker}(f).$$

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $\cap_{i \in I} V[\pi_{1,i}]$ est le noyau de l'application de l'énoncé puisque le noyau de $p_{\pi_{1,i}}$ est $V[\pi_{1,i}]$ par définition. Ensuite, on voit facilement que la dernière égalité est vraie étant donné que $\mathrm{Hom}_{G_1}(V, \oplus_i \pi_{1,i}) = \prod_i \mathrm{Hom}_{G_1}(V, \pi_{1,i})$.

Il reste donc à prouver que l'application ainsi définie est surjective. On le montre à l'aide d'une récurrence finie. Soit $i_0 \in I$. Par définition $V_{\pi_{1,i_0}} = V/V[\pi_{1,i_0}]$ est une représentation π_{1,i_0}-isotypique dans $\mathrm{Rep}_R(G_1)$. Pour tout $i \in I$ avec $i \neq i_0$, on a :

$$V_{\pi_{1,i}} = (V[\pi_{1,i_0}])_{\pi_{1,i}}.$$

En effet on a des inclusions $V[\pi_{1,i}] \cap V[\pi_{1,i_0}] \subset V[\pi_{1,i_0}] \subset V$, où le dernier quotient $V/V[\pi_{1,i_0}]$ est π_{1,i_0}-isotypique et le premier est $\pi_{1,i}$-isotypique. Par conséquent V se surjecte sur $V_{\pi_{1,i}} \oplus V_{\pi_{1,i_0}}$ avec $V_{\pi_{1,i_0}} \simeq V[\pi_{1,i_0}]/V[\pi_{1,i}] \cap V[\pi_{1,i_0}]$. Une récurrence finie montre qu'il en de même pour $|I|$ représentations deux à deux non isomorphes : si l'on considère par exemple $V[\pi_{1,i_0}] \to \oplus_{i \in I \backslash i_0} V_{\pi_{1,i}}$ au lieu de l'application de l'énoncé, les images de V et de $V[\pi_{1,i_0}]$ dans $\oplus_{i \in I \backslash i_0} V_{\pi_{1,i}}$ sont égales, et on peut recommencer pour un autre indice i_1 de $I \backslash \{i_0\}$. Comme I est fini, on en déduit que l'application de l'énoncé est surjective. $\square$

Comportement vis-à-vis de l'extension des scalaires. On fixe une clôture algébrique $\bar{R}$ de R. Pour toute représentation irréductible admissible π_1 dans $\mathrm{Rep}_R(G_1)$, et quand le corps R est parfait, le Théorème B.2 assure qu'il existe $\rho_1 \in \mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_1)$ irréductible (admissible) telle que :

$$\pi_1 \otimes_R \bar{R} \simeq m_1 \Big(\bigoplus_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})} w\rho_1 \Big).$$

Soit $V \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$. Peut-on relier l'espace des π_1-coinvariants V_{π_1} avec l'ensemble des $w\rho_1$-coninvariants $V_{w\rho_1}$ où $w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})$? La réponse est apportée par le théorème suivant.

Théorème B.13. *On suppose que R est un corps parfait. Soit (π_1, V_1) une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G_1)$. On considère la décomposition précédente de $\pi_1 \otimes_R \bar{R}$ donnée par le Théorème B.2. Alors pour tout $V \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$, on a :*

$$V_{\pi_1} \otimes_R \bar{R} \simeq \bigoplus_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R})} (V \otimes_R \bar{R})_{w\rho_1}.$$

Démonstration. D'après le Corollaire B.12, l'application :

$$V \otimes_R \bar{R} \to \bigoplus_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R})} (V \otimes_R \bar{R})_{w\rho_1}$$

est surjective et a pour noyau $\bigcap_w (V \otimes_R \bar{R})[w\rho_1]$. On va montrer que :

$$V[\pi_1] \otimes_R \bar{R} = \bigcap_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R})} (V \otimes_R \bar{R})[w\rho_1].$$

Cette dernière égalité entraînera alors que $(V \otimes_R \bar{R})/(V[\pi_1] \otimes_R \bar{R}) \simeq V_{\pi_1} \otimes_R \bar{R}$ est le plus grand quotient isotypique de V associé, au sens du Corollaire B.12, à la famille finie $(w\rho_1)_{w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1),\bar{R})}$.

L'inclusion directe demande le moins d'effort. Soit $v \in V[\pi_1]$. Il s'agit de montrer que pour tout $w \in \mathrm{Gal}_R(E(\rho_1), \bar{R})$ et tout $f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V \otimes_R \bar{R}, w\rho_1)$, on a $v \otimes_R 1 \in \mathrm{Ker}(f)$. En particulier, un tel f définit un morphisme de $R[G_1]$-modules $\mathrm{Res}^R(V \otimes_R \bar{R}) \to \mathrm{Res}^R(w\rho_1)$ par oubli des scalaires. De plus, le morphisme f est non nul si et seulement si sa restriction à $V \otimes_R 1 = \{v \otimes_R 1 \mid v \in V\}$ est non nulle. Or, comme dans les premières lignes de la preuve du Lemme B.4, la représentation $\mathrm{Res}^R(w\rho_1)$ est π_1-isotypique. Par conséquent $f|_{V \otimes_R 1} : V \simeq V \otimes_R 1 \to \mathrm{Res}^R(w\rho_1) \simeq \oplus \pi_1$. Donc $f(v \otimes_R 1) = 0$ par définition de $V[\pi_1]$.

En ce qui concerne le sens indirect, on sait d'après le Lemme B.11 qu'il existe un $R[G_2]-D_1$-bimodule lisse V_2 tel que $V_{\pi_1} \simeq V_2 \otimes_{D_1} V_1$ où $D_1 = \mathrm{End}_{G_1}(\pi_1)$ est une algèbre à division de degré m_1 sur son centre. De plus, on a un isomorphisme de représentations :

$$V_{\pi_1} \otimes_R \bar{R} \simeq (V_2 \otimes_R \bar{R}) \otimes_{D_1 \otimes_R \bar{R}} (V_1 \otimes_R \bar{R}).$$

D'après le Théorème B.2, l'anneau $D_1 \otimes_R \bar{R}$ est isomorphe à $\prod_w e_w D \simeq \prod_w M_{m_1}(\bar{R})$ où $(e_w)_{w \in \mathrm{Gal}_R(E_1,\bar{R})}$ est un système d'idempotents centraux primitifs dans $D_1 \otimes_R \bar{R}$. On en déduit que :

$$V_{\pi_1} \otimes_R \bar{R} \simeq \bigoplus V_w \otimes_{e_w D} (m_1(w\rho_1))$$

où $m_1 w\rho_1 = e_w(\pi_1 \otimes_R \bar{R})$ et $V_w = V_2 e_w$.

On montre ensuite qu'il existe une représentation $V_{2,w} \in \mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_2)$ telle que :

$$V_w \otimes_{e_w D} (m_1(w\rho_1)) \simeq V_{2,w} \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1).$$

En effet $e_w D \simeq M_{m_1}(\bar{R})$, et en notant $e_{i,j}$ la matrice élémentaire dans $M_{m_1}(\bar{R})$, on a $e_{1,1} + \cdots + e_{m_1,m_1} = \mathrm{Id}_{m_1}$ qui est une décomposition de l'identité en somme d'idempotents. Ils ne sont cependant pas centraux dans $M_{m_1}(\bar{R})$. Néanmoins, chaque $e_{i,i}$ définit une application $v \in V_w \mapsto ve_{i,i} \in V_w$ qui est un morphisme de $\bar{R}[G_2]$-modules. De plus $e_{i,i}V_w \simeq e_{1,1}V_w$ pour tout i. En notant $V_{2,w} = V_w e_{1,1} \in \mathrm{Rep}_{\bar{R}}(G_2)$, on a $V_w \simeq m_1 V_{2,w}$ et $(m_1 V_{2,w}) \otimes_{M_{m_1}(\bar{R})} (m_1(w\rho_1)) \simeq V_{2,w} \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1)$. Ainsi le quotient $V \otimes_R \bar{R} \to V_{2,w} \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1)$ se factorise par $(V \otimes_R \bar{R})_{w\rho_1}$ par définition du plus grand quotient $w\rho_1$-isotypique. Donc le quotient $V \otimes_R \bar{R} \to V_{\pi_1} \otimes_R \bar{R} \simeq \oplus_w V_{2,w} \otimes_{\bar{R}} (w\rho_1)$ se factorise par $\oplus_w (V \otimes_R \bar{R})_{w\rho_1}$. En d'autres termes $\cap_w (V \otimes_R \bar{R})_{w\rho_1} \subset V[\pi_1] \otimes_R \bar{R}$. □

Références

[Bou12] N. Bourbaki. *Algèbre, Chapitre 8 : Modules et anneaux semisimples.* Springer, 2012.

[CT13] G. Chinello and D. Turchetti. Weil representation and metaplectic groups over an integral domain. *Communications in algebra*, 43 :6 :2388–2419, 2013.

[Dat05] J.-F. Dat. ν-tempered representations of p-adic groups I : ℓ-adic case. *Duke Math. J.*, 126(3) :397–469, 2005.

[Fla79] D. Flath. Decomposition of representations into tensor products. In *Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. in Pure Maths XXXIII*, pages 275–286. AMS, 1979.

[GS17] W. T. Gan and B. Sun. The Howe duality conjecture : quaternionic case. In *Representation theory, number theory and invariant theory*, volume 323, in honor of R. Howe's 70th birthday of *Progress in Mathematics*, pages 175–192. Weizmann, Cham, 2017.

[GT11] W. T. Gan and S. Takeda. The local Langlands conjecture for GSp(4). *Ann. of Math. (2)*, 173(3) :1841–1882, 2011.

[GT16] W. T. Gan and S. Takeda. A proof of the Howe duality conjecture. *J. of the Amer. Math. Society*, 29(3) :473–493, 2016.

[HKS96] M. Harris, S. S. Kudla, and W. J. Jr. Sweet. Theta dichotomy for unitary groups. *J. of the Amer. Math. Soc.*, 9 :941–1004, 1996.

[How79] R. Howe. θ-series and invariant theory. In A. Borel and W. Casselman, editors, *Automorphic forms, Representations and L-functions, Part I*, volume 33, pages 275–285. American Math. Soc., 1979.

[KS20] R. Kurinczuk and S. Stevens. Cuspidal ℓ-modular representations of p-adic classical groups. *J. Reine Angew. Math (Crelles Journal)*, 2020.

[Kud86] S. S. Kudla. On the local theta correspondence. *Invent. Math.*, 83 :229–255, 1986.

[Kud94] S. S. Kudla. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs. *Israel Journal of Mathematics*, 87 :1-3 :361–401, February 1994.

[Mín06] A. Mínguez. *Correspondance de Howe ℓ-modulaire : paires duales de type II.* PhD thesis, Université d'Orsay, 2006.

[Mín08] A. Mínguez. Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 41(5) :717–741, 2008.

[Moo68] C. C. Moore. Group extensions of p-adic and adelic linear groups. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, 35 :5–70, 1968.

[MVW87] C. Moeglin, M.-F. Vignéras, and J.-L. Waldspurger. *Correspondance de Howe sur un corps p-adique.* Springer, 1987.

[Per81] P. Perrin. Représentations de Schrödinger, indices de Maslov et groupe métaplectique. In *Non commutative harmonic analysis and Lie groups, Proceedings Marseille-Luminy 1980*, pages 370–407. Springer LN 880, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[Ral84] S. Rallis. On the Howe duality conjecture. *Compositio Mathematica*, 51(3) :333–3999, 1984.

[Ren09] D. Renard. *Représentations des groupes réductifs p-adiques.* SMF, 2009.

[RR93] R. Ranga Rao. On some explicit formulas in the theory of Weil representation. *Pacific J. Math.*, 157(2) :335–371, 1993.

[Shi12] S. W. Shin. Abelian varieties and Weil representations. *Algebra Number Theory*, 6 :1719–1772, 2012.

[SS74] T. A. Springer and R. Steinberg. *Conjugacy classes in algebraic groups.* Springer, 1974.

[Ste62] R. Steinberg. Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques. In *Colloque sur la théorie des groupes algébriques*, pages 113–128, Bruxelles, 1962.

[SZ15] B. Sun and C.-B. Zhu. Conservation relations for local theta correspondence. *J. of the Amer. Math. Soc.*, 28(4) :939–983, October 2015.

[Tri19] J. Trias. *Correspondance thêta locale ℓ-modulaire.* PhD thesis, Sorbonne Université, Jussieu, 2019.

[Vig96] M.-F. Vignéras. *Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$.* Birkhäuser, 1996.

[Vig01] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour $\mathrm{GL}(n, F)$ modulo $l \neq p$. *Invent. Math.*, 144 :177–223, 2001.

[Wal90] J.-L. Waldspurger. Démonstration d'une conjecture de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$. In S. S. Gelbart, R. Howe, and P. Sarnak, editors, *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I*, Israel Math. Conf. Proc. 2, pages 267–324. Weizmann, Jerusalem, 1990.

[Wei64] A. Weil. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111 :143–211, 1964.

[Yam14] S. Yamana. L-functions and theta correspondence for classical groups. *Inventiones mathematicae*, 196 :651–732, 2014.