Sorbonne Université

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Justin Trias

Correspondance thêta locale ℓ-modulaire

---

dirigée par Alberto Mínguez

Soutenue le 25 octobre 2019 devant le jury composé de :

Mme Anne-Marie Aubert	Sorbonne Université	Examinatrice
M. Jean-François Dat	Sorbonne Université	Examinateur
Mme Marcela Hanzer	Université de Zagreb	Examinatrice
M. Guy Henniart	Université Paris-Sud	Examinateur
M. Nadir Matringe	Université de Poitiers	Rapporteur
Mme Colette Moeglin	Sorbonne Université	Examinatrice
M. Alberto Mínguez	Université de Vienne	Directeur
M. Vincent Sécherre	Université de Versailles	Examinateur

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

À Geneviève et Jean, mes parents.

J'ai décidé de jouer à un petit jeu avec ces mots que l'on a entendus cent fois et qui semblent l'évidence même, mais dont il est parfois bon de se rappeler la signification première, pour par exemple bien peser le sens de chacun et méditer – à la lumière des quatre dernières années qui se sont écoulées pour ma part – sur ce qu'ils évoquent en nous. J'ai tâché de rendre tout ceci le plus complet possible, moins par souci de l'exercice de style, que pour avoir un témoin de ce que je vivais à cet instant et pouvoir m'en souvenir plus tard.

Dictionnaire des remerciements

REMERCIEMENT n.m. Action de remercier quelqu'un, de lui témoigner la gratitude ou de la reconnaissance pour ce qu'il fait ou a fait.

DIRECTEUR n.m. Personne chargée de diriger, d'administrer une entreprise, une société, un établissement scolaire, un club, un service important, etc., d'en coordonner les opérations et de les conduire pour atteindre l'objectif visé.

« Alberto, je veux te dire merci pour m'avoir amené à l'endroit où je me trouve aujourd'hui, toujours avec bienveillance, patience et décontraction. Apprendre à faire des maths avec toi met au centre le plaisir d'en faire et en donne une vision pleine d'humanité et d'humilité selon moi. Je garderai précieusement tes conseils avisés pour la suite. Encore merci pour cette aventure et pour m'avoir introduit à ce sujet passionnant. »

JURY n.m. Commission de personnes qualifiées, réunies officiellement pour évaluer et noter des candidats à un examen, à un concours.

« Le mot "qualifié" prend tout son sens quand je vois la liste des membres de mon jury. Je voudrais tout d'abord exprimer la reconnaissance et la dette que j'ai à l'égard des rapporteurs de cette thèse, Wee Teck Gan et Nadir Matringe. Leur travail minutieux de relecture me permet d'améliorer toujours plus ce manuscrit et il ne me sera possible d'en apprécier tous les bienfaits qu'avec plus de recul. C'est un honneur pour moi d'avoir un jury composé de chercheurs et chercheuses expérimentés et dont j'apprécie les qualités, aussi bien mathématiques qu'humaines. Merci donc à Marcela Hanzer d'avoir fait le déplacement depuis la Croatie ; à Colette Moeglin et à Vincent Sécherre, pour certaines discussions marquantes et l'intérêt sincère qu'ils témoignent aux jeunes doctorants, que ce soit lors de conférences ou ailleurs. Merci enfin à Anne-Marie Aubert, Jean-François Dat et Guy Henniart, d'avoir toujours pris le temps de m'ouvrir leur porte, le temps d'une question, d'un conseil ou d'une demande de soutien, et de transmettre de manière contagieuse leur motivation à faire des mathématiques. »

CHERCHEUR,SE adj. et n. **1.** Personne dont le métier consiste à faire de la recherche scientifique. **2.** LITTÉR. Qui est curieux, avide de découvertes.

« Je voudrais exprimer ici toute ma gratitude envers Marie-France Vignéras, aussi bien pour sa gentillesse infinie que pour l'oreille attentive et l'inspiration qu'elle a su offrir vis-à-vis des nombreuses interrogations qu'a soulevé en moi la théorie des représentations modulaires ; tout comme Jean-Loup Waldspurger, qui a su répondre lors d'une entrevue enrichissante à nombre de mes questionnements concernant le livre sur la correspondance thêta. Enfin, je n'oublie pas Benoît Stroh, qui à l'époque, m'avait encouragé à aller vers Alberto Mínguez, ainsi que Shaun Stevens avec qui j'aurai le plaisir de bientôt travailler. »

COLLÈGUE n. **1.** Personne qui exerce la même fonction qu'une autre ou appartient au même établissement. **2.** RÉG. (midi) Ami, camarade.

« Il faut souligner la qualité de l'environnement de travail dont j'ai pu bénéficier ces quatre dernières. Merci tout d'abord à l'IMJ et sa direction, pour leur soutien sans faille, en particulier à destination de différentes activités comme le séminaire des thésards, que j'ai eu plaisir à organiser avec Arnaud, Hussein, Juan-Pablo, Reda et Pierre-Antoine, et dont je suis heureux qu'Ilias et Linyuan aient pris la succession ; la rencontre master-doctorant, qui a été initiée grâce à Léo, et dont Alexandre, Benoît et Xavier perpétuent la tradition avec réussite. Il y aussi : le séminaire Aromaths dont je garde de très bons souvenirs grâce à Ayman, Frédéric, Juliette et Sundarshan ; les personnalités mémorables au sein de l'ancien BDD, comme les inséparables Louis et Nicolina, ainsi que du suivant, avec Mathieu et Sylvain ; mes co-bureaux, Adrien, Arthur et Eckhard, pour tous ces moments sympathiques en votre compagnie, et les doctorants de l'IMJ passés et présents : Amiel, Florestan, Long, Mathieu, Vadim... Et ceux dont je tire une grande fierté de les compter au nombre de mes amis : Adrien B., Adrien D., Arthur-César, Jean-Michel, Jesua, Valentin, Vincent, et mes amis anglais Michael et Peter. Enfin, je rends grâce à cette amitié inestimable qui me lie à vous Thomas et Hugo. »

AMITIÉ n.f. Sentiment d'affection entre deux personnes ; attachement, sympathie qu'une personne témoigne à une autre.

« Je souhaiterais dire à tous ceux et toutes celles qui s'y reconnaîtront à quel point je tiens à vous ; et je préfère vous le témoigner dans la vraie vie avec une affection parfois maladroite plutôt qu'en me lançant dans un inventaire à la Prévert. Merci de votre soutien et de tous ces moments partagés, à Mallemort, Avignon, Paris, ou ailleurs. »

FAMILLE n.f. Ensemble formé par le père, la mère, et les enfants.

« Maman, Papa, Aubin. On ne choisit pas sa famille, mais on choisit de l'aimer. Et je ferai toujours ce choix. »

AMOUR n. Inclination d'une personne pour une autre, de caractère passionnel et/ou sexuel.

« Celui-ci est pour toi Aline. C'est un merci en forme de je t'aime. »

Résumé

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2 et de caractéristique résiduelle p. La correspondance thêta locale sur F établit une bijection entre des sous-ensembles de représentations lisses irréductibles complexes d'un premier groupe réductif H et d'un second groupe réductif H', où (H, H') forme une paire duale dans un groupe symplectique. Soit R un corps de caractéristique ℓ positive différente de p. Dans ce travail, on donne des conditions minimales sur R pour généraliser le théorème de Stone-von Neumann au cas des représentations modulaires *i.e.* à coefficients dans R. Cela permet ensuite de construire la représentation de Weil modulaire qui vérifie des propriétés analogues au cas complexe [MVW87]. Quand R est algébriquement clos, on généralise la preuve de la correspondance classique pour les paires duales non quaternioniques [GT16] sous deux hypothèses. La première est que ℓ soit suffisamment grand vis-à-vis d'une borne explicite dépendant des pro-ordres H_1 et H_2. La seconde est une hypothèse qui résulterait d'une meilleure connaissance de la théorie des opérateurs d'entrelacement dans le cas modulaire.

Mots-clés

Représentations, Correspondance thêta, Correspondance de Langlands locale, Groupes p-adiques, Théorie des représentations modulaires, Paires duales.

Abstract

Let F be a local non archimedean field of characteristic not 2 and residual characteristic p. The local theta correspondence over F gives a bijection between some subsets of irreductible smooth complex reprensentations of a first reductive group H and a second reductive group H', where (H, H') is a dual pair in a symplectic group. Let R be a field of characteristic ℓ different from p. In this thesis, we give minimal conditions on R so that Stone-von Neumann's theorem can be generalised in the setting of modular representation theory, which means when the coefficient field is R. This generalisation enables to define a modular Weil representation which verifies analogous properties to that of the complex case [MVW87]. When R is algebraically closed, we generalise the proof of the classical correspondence for non quaternionic dual pairs [GT16] under two assumptions. Firstly, the characteristic ℓ has to be greater than a certain explicit bound which depends on the pro-orders of H_1 and H_2. The second hypothesis have a deep connection to the theory of intertwining and would result from a better understanding of that theory in the modular setting.

Keywords

Representations, Theta correspondence, Local Langlands correspondence, p-adic groups, Modular representation theory, Dual pairs.

Table des matières

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie des représentations des groupes p-adiques. Elle propose de généraliser la correspondance thêta locale sur un corps local non archimédien à des représentations dont le corps de coefficients est quelconque.

Il existe une version globale et une version locale de cette correspondance. Elles mettent toutes deux en jeu la notion – introduite par Howe dans les années 70 – de paires réductives duales dans un groupe symplectique. Dans sa version globale, elle établit une bijection entre formes automorphes de deux groupes formant une telle paire et généralise la correspondance de Shimura. Pour citer une de ses applications arithmétiques, la formule du produit scalaire de Rallis relie des propriétés analytiques de fonctions L à la non nullité de certains relevés dans la correspondance. Sa version locale établit quant à elle une bijection entre des représentations lisses irréductibles complexes de deux groupes définis sur un corps local formant une paire réductive duale. Ses développements se divisent en deux catégories, selon que le corps local considéré est archimédien ou non archimédien.

L'étude des représentations lisses des groupes réductifs p-adiques sur un corps de caractéristique ℓ différente de p a été débutée par Vigneras à la fin des années 80. Elle a ensuite étendue cette théorie [Vig96] aux corps locaux non archimédiens et a montré [Vig01] dans ce cadre la correspondance de Langlands pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_\ell}$. Ses méthodes permettent également d'explorer des questions liées aux congruences entre formes automorphes. On opère souvent la distinction en désignant comme *classique* la théorie des représentations à coefficients complexes, et *modulaire* celle des représentations à coefficients quelconques.

On invite maintenant à présenter au lecteur ce qui constitue le résultat central au cœur de la correspondance thêta locale pour des représentations à coefficients complexes. On exposera ensuite un petit récapitulatif concernant les représentations modulaires, avant d'examiner les principales contributions que ce travail de thèse entend produire.

Correspondance thêta locale classique

Dorénavant, F désignera un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2 et de caractéristique résiduelle p. On donne sans plus attendre un énoncé plus précis de la version locale de la correspondance pour enfin rendre justice aux principaux contributeurs dans le cas classique.

Soit W un espace symplectique de dimension finie sur F. Une *paire duale* (H_1, H_2) dans $\mathrm{Sp}(W)$ est un couple de sous-groupes de $\mathrm{Sp}(W)$ qui sont centralisateurs l'un de l'autre *i.e.* $Z_{\mathrm{Sp}(W)}(H_1) = H_2$ et $Z_{\mathrm{Sp}(W)}(H_2) = H_1$. On dit que cette paire est *réductive* si H_1 et H_2 sont des groupes réductifs et si W est H_1-semi-simple et H_2-semi-simple. La classification des paires réductives duales de $\mathrm{Sp}(W)$ a été faite par Howe à l'aide des paires dites *irréductibles*. Ce sont celles qui ne s'obtiennent pas comme produit de paires plus petites. Généralement, il suffit de prouver les énoncés que l'on va rencontrer pour ces paires élémentaires pour qu'ils soient vrais pour toute paire réductive duale. Aussi vont-elles concentrer toute l'attention. Les paires duales irréductibles sont de deux sortes : les paires dites de type I, qui comprennent les groupes symplectiques, orthogonaux et unitaires ; les paires de type II, qui concernent des groupes linéaires sur des algèbres à division de dimension finie sur F.

La notion de paires duales réductives trouve tout son intérêt au travers de la représentation de Weil qui sert à définir la correspondance. Soit $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ un caractère additif non trivial. Dans les années 60, Weil a défini [Wei64] une représentation lisse complexe ω_ψ du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$, où ce groupe est une extension centrale topologique de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\mathbb{C}^\times$. Elle se restreint aux relevés de paires duales de $\mathrm{Sp}(W)$ de la façon suivante. Pour H un sous-groupe fermé de $\mathrm{Sp}(W)$, on note $\widetilde{H}$ l'image réciproque de H dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Alors le relevé $(\widetilde{H_1}, \widetilde{H_2})$ d'une paire duale réductive (H_1, H_2) dans $\mathrm{Sp}(W)$ est une paire duale dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ et la multiplication $\widetilde{H_2} \times \widetilde{H_2} \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ induit un morphisme de groupes. On note encore ω_ψ la représentation de $\widetilde{H_1} \times \widetilde{H_2}$ obtenue en composant la représentation de Weil avec ce morphisme.

Pour H un sous-groupe fermé de $\mathrm{Sp}(W)$, on note $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H})$ la sous-catégorie des représentations lisses complexes de $\widetilde{H}$ telles que $\pi(1, \lambda) = \lambda \mathrm{Id}$. Le théorème suivant, dont on va lister les contributeurs immédiatement après, constitue l'énoncé essentiel de la correspondance thêta classique :

Théorème (Correspondance thêta classique)**.** *Soient* (H_1, H_2) *une paire réductive duale dans* $\mathrm{Sp}(W)$ *et* $\omega_\psi \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W))$ *la représentation de Weil que l'on restreint à* $\widetilde{H_1} \times \widetilde{H_2}$*. Soit* $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_1})$ *irréductible. Alors :*

(i) il existe $\Theta(\pi_1) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_2})$ *telle que le plus grand quotient* π_1*-isotypique* $(\omega_\psi)_{\pi_1}$ *de* ω_ψ *soit isomorphe à* $\pi_1 \otimes \Theta(\pi_1)$ *dans* $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_1} \times \widetilde{H_2})$ *;*

(ii) le plus grand quotient semi-simple $\theta(\pi_1)$ *de* $\Theta(\pi_1)$ *est, nul si* $\Theta(\pi_1) = 0$*, et irréductible sinon ;*

(iii) de plus, quand $\Theta(\pi_1) \neq 0$*, on a :*

$$\theta(\pi_1) = \theta(\pi_1') \Leftrightarrow \pi_1 \simeq \pi_1'.$$

En notant $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H})$ les classes d'équivalence de représentations irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H})$, les points (i) et (ii) assurent donc que la correspondance thêta définit une bijection entre les sous-ensembles de $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_1})$ et $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_2})$:

$$\{\pi_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_1}) \mid \Theta(\pi_1) \neq 0\} \text{ et } \{\pi_2 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_2}) \mid \exists \pi_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\widetilde{H_1}),\ \pi_2 = \theta(\pi_1)\}.$$

Resté pendant des années conjectural, ce résultat aujourd'hui pleinement démontré est aussi connu sous le nom de conjecture de Howe ou dualité de Howe ou encore correspondance de Howe. Tout d'abord, Howe a prouvé [How89] l'analogue de ce théorème quand F le corps des nombres réels. Pour ce qui est du cas non archimédien, il a également donné une preuve lors d'un séminaire pour les paires duales de type I non ramifiées quand $p \neq 2$ dans les années 80, qui a été rédigée par Waldspurger dans [MVW87, Chap. 5]. Ensuite, Waldspurger a démontré [Wal90] le cas général des paires de type I, toujours avec cette restriction $p \neq 2$. Le cas des paires de type II, réputé vrai, est resté longtemps sans preuve jusqu'aux années 2000 et le travail de Mínguez [Mín08], qui ne porte pas de restriction sur la caractéristique résiduelle p. S'inspirant des arguments de ce dernier, Gan et Takeda ont donné [GT16] une nouvelle preuve de la correspondance pour les paires de type I commutatives (cf. tableau de la Section 2.3) sans restriction aucune sur p. Enfin, Gan et Sun ont complété [GS17] le cas restant en traitant les paires de type I quaternioniques.

La preuve de Gan et Takeda présente un double avantage qui est le point de départ de ce travail de thèse : en plus d'être relativement courte, elle se base sur des idées qui traitaient à l'origine de représentations à coefficients modulaires. C'est Mínguez qui a opéré le premier travail [Mín06] en direction d'une correspondance thêta locale ℓ-modulaire. Il a prouvé, en prenant un analogue *ad-hoc* de la représentation de Weil pour une paire (H_1, H_2) de type II, que le théorème précédent était vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ à condition que ℓ ne divise pas le pro-ordre de H_1 et H_2. Il donne également un contre-exemple que l'on détaille plus loin quand cette condition sur ℓ n'est pas vérifiée. Malheureusement, cette approche ne fournit pas de cadre pour traiter des paires de type I à moins de reconstruire la théorie depuis le départ. C'est le parti pris de ce travail : de partir de zéro et de généraliser au cas modulaire le développement du livre-référence [MVW87] sur la correspondance thêta locale dans le cas non archimédien. On mentionne toutefois les travaux de Shin qui porte sur une construction géométrique de la représentation de Weil et donne une représentation en caractéristique p qui est inaccessible par les méthodes que l'on envisage.

Représentations modulaires

Dans toute la suite, F désigne un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et de cardinal résiduel q. Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. On appelle *groupe réductif connexe sur F* l'ensemble des points rationnels $G = \mathbb{G}(F)$ de tels groupes algébriques. C'est un groupe topologique qui est localement profini, ce qui signifie qu'il existe une base de voisinage de l'identité constituée d'ouverts compacts. En particulier, la topologie de tels groupes est totalement discontinu. Une représentation (π, V) de G à coefficients dans un anneau R est la donnée d'un R-module V et d'un morphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{GL}_R(V)$. On s'intéresse exclusivement ici aux représentations dites *lisses i.e.* celles pour lesquelles le stabilisateur de tout élément $v \in V$ est ouvert dans G. Une représentation lisse est *admissible* si pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, le R-module V^K des vecteurs fixes par K est de type fini en tant que R-module. On note $\mathrm{Rep}_R(G)$ la catégorie des représentations lisses à coefficients dans R et $\mathrm{Irr}_R(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles. Pour $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}_R(G)$, on note $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi')$ l'ensemble des morphismes de R-modules de π dans π' qui sont G-équivariants.

On emploiera dorénavant le mot « représentation » pour signifier « représentation lisse ». On rappelle la distinction déjà évoquée entre le cas dit *classique* quand $R = \mathbb{C}$ et le cas dit *modulaire* quand R est un corps de caractéristique positive. Une des différences notables est que la théorie est très sensible à la caractéristique ℓ de R. Soit G un groupe localement profini. Le *pro-ordre* $|G|$ de G est le plus petit commun multiple de l'ensemble des pro-ordres $|K|$, où K parcourt les sous-groupes compacts ouverts de G. Pour un groupe réductif sur F, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|G| = n.p^\infty$. Par convention, 0 ne divise pas le pro-ordre de G. On dira que ℓ est *banal* vis-à-vis de G si R est algébriquement clos et ℓ ne divise pas le pro-ordre de G.

Cette sensibilité à la caractéristique ℓ du corps des coefficients R que l'on vient d'évoquer se manifeste tout particulièrement avec la distinction cuspidale/supercuspidale qui n'a pas lieu dans le cas complexe. Avant de définir ces représentations, on fait remarquer qu'elles constituent en quelque sorte les briques élémentaires permettant d'obtenir et classifier toutes les représentations irréductibles, ce qui leur donne une place prépondérante au cœur de la théorie et justifie l'intérêt qu'on leur porte. Soient G un groupe réductif connexe sur F et R un anneau. Soit $P = MN$ un parabolique de G de facteur de Levi M et de radical unipotent N. On suppose que R contient une racine carrée de q, que l'on fixe alors. Cela permet de définir les foncteurs d'induction et de restriction paraboliques normalisés, où le premier est l'adjoint à droite du second :

$$i_P^G : \mathrm{Rep}_R(M) \to \mathrm{Rep}_R(G) \text{ et } r_G^P : \mathrm{Rep}_R(G) \to \mathrm{Rep}_R(M).$$

Une représentation $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R(G)$ est dite : *cuspidale* si pour tout parabolique propre $P = MN$ de G, on a $r_G^P(\pi) = 0$; *supercuspidale* si π_1 est irréductible et si pour tout parabolique propre $P = MN$ de G, pour toute $\sigma \in \mathrm{Rep}_R(M)$, la représentation π_1 n'est pas sous-quotient de $i_P^G(\sigma)$. Toute représentation supercuspidale est irrédutible cuspidale. Dans le cas complexe, ces deux notions coïncident. Plus généralement, la réciproque est vraie sur un corps algébriquement clos R si sa caractéristique ℓ ne divise pas le pro-ordre de $G/Z(G)$, où $Z(G)$ est le centre de G. On dira dans ce cas que ℓ est *faiblement banal*. Une représentation est dite projective modulo le centre (resp. injective modulo le centre) si elle admet un caractère central χ et si elle est un objet projectif (resp. injectif) dans la sous-catégorie $\mathrm{Rep}_R(G, \chi)$ des représentations à caractère central χ fixé. Vigneras prouve [Vig96] que quand ℓ est faiblement banal vis-à-vis de G, les représentations irréductibles cuspidales sont projectives modulo le centre et injectives modulo le centre. On en déduit dans la Section 1.2.3 un corollaire utile pour la suite, à savoir que quand G est à centre compact et que ℓ est banal vis-à-vis de G, on peut enlever la mention « modulo le centre » précédente. Cela signifie dans ce cas que les représentations irréductibles cuspidales sont des objets projectifs et injectifs de la catégorie $\mathrm{Rep}_R(G)$.

Dans le cas complexe, les notions que l'on vient de présenter s'étendent facilement [GH97] aux groupes réductifs non-connexes $G = \mathbb{G}(F)$ à condition que le quotient de $\mathbb{G}$ par sa composante neutre $\mathbb{G}^0$ soit abélien. Un examen minutieux mais sans difficulté montre qu'il en va de même de leurs versions modulaires. En particulier, on gardera à l'esprit que la théorie des représentations du groupe orthogonal se traite de manière similaire à celle de tout groupe réductif connexe.

Représentation de Weil modulaire

Dans [MVW87], le point de départ pour construire la représentation de Weil est le théorème de Stone-von Neumann. Aussi commence-t-on par généraliser ce résultat au cas modulaire. Il se trouve que ces constructions font également sens pour des corps finis. On conserve ce niveau de généralité aussi longtemps que possible, bien que l'on fasse remarquer que ces deux théories, *i.e.* pour les corps finis et pour les locaux non archimédiens, connaissent ensuite des développements radicalement différents. On signalera l'arrivée de ce carrefour à partir duquel on abandonnera cette voie en se concentrant exclusivement à la théorie non archimédienne.

Soit F un corps qui est, soit fini de caractéristique p, soit local non archimédien de caractéristique résiduelle p, mais toujours de caractéristique différente de 2. Sauf mention du contraire, R sera un corps de caractéristique ℓ. On suppose qu'il existe un caractère non trivial $\psi : F \to R^\times$. En particulier, cela impose que $\ell \neq p$. Soit $H = W \times F$ muni de la loi de groupe :

$$(w, t)(w', t') = (w + w', t + t' + \frac{1}{2} < w, w' >).$$

On appelle ce groupe le *groupe d'Heisenberg.* Son centre est $F \simeq \{(1,t) \mid t \in F\}$. Le premier résultat important que l'on obtient est démontré dans la Section 3. Il s'agit de la généralisation du théorème de Stone-von Neumann :

Théorème A (Stone-von Neumann modulaire)**.** *Il existe à isomorphisme près une unique représentation lisse irréductible de H à coefficients dans R et dont le caractère central soit ψ. On note ρ_ψ cette unique classe d'isomorphisme et on l'appelle R*-représentation métaplectique de H associée à ψ*. De plus,* $\mathrm{End}_H(\rho_\psi) = R$.

Ce théorème est la clé pour définir la représentation de Weil. On va décrire succinctement les étapes essentielles pour y arriver et qui sont développées dans la Section 4, à laquelle on réfère pour plus de détails. Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ agit sur le groupe d'Heisenberg H en préservant son centre. En particulier, cette action induit une action du groupe symplectique sur l'unique classe d'isomorphisme affirmée par le théorème. Si (ρ_ψ, S) est un modèle de la R-représentation métaplectique, alors cette action entraîne l'existence d'un morphisme de groupes $\rho_S : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S)$ qu'on appelle R-représentation projective. La théorie des représentations projectives assure qu'on peut relever ce morphisme en une vraie représentation $\omega_{\psi,S}$ du produit fibré, dans la catégorie des groupes topologiques, de $\mathrm{Sp}(W)$ et $\mathrm{PGL}(S)$ au-dessus de $\mathrm{PGL}(S)$:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W) & \xrightarrow{\omega_{\psi,S}} & \mathrm{GL}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \scriptstyle{\mathrm{red}} \\ \mathrm{Sp}(W) & \xrightarrow{\rho_S} & \mathrm{PGL}(S) \end{array}$$

Ce produit fibré est une extension centrale topologique de $\mathrm{Sp}(W)$ par $R^\times$ dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de S. À l'exception du cas $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F W = 2$, où le groupe $\mathrm{Sp}(W)$ n'est pas parfait, ces groupes sont canoniquement isomorphes en tant qu'extension centrale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $R^\times$. On appelle *R-groupe métaplectique* cette unique classe d'isomorphisme d'extension centrale. En fixant un modèle $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ pour le R-groupe métaplectique, et en notant $i_s : \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ l'unique isomorphisme d'extension centrale entre ces deux groupes, on obtient que la classe d'isomorphisme de $\omega_{\psi,S} \circ i_S \in \mathrm{Rep}_R(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W))$ ne dépend pas du choix de S. On la nomme *R-représentation de Weil associée à ψ* et on la note ω_ψ. En revanche, comme la notation semble le suggérer, cette classe d'isomorphisme dépend du choix de ψ. On indique finalement qu'il existe une autre méthode pour construire la représentation de Weil dans le cas modulaire [CT13] en suivant la construction d'origine [Wei64] plutôt que [MVW87]. Dans l'Annexe A.2, on montre que toutes ces constructions sont équivalentes.

Il y a maintenant suffisamment d'ingrédients pour espérer obtenir un analogue du point (i) de la correspondance thêta classique. En pensant qu'aucune confusion ne soit maintenant possible, on réemploie les notations de cette partie avec R en lieu et place de $\mathbb{C}$. Soit (H_1, H_2) une paire duale réductive dans $\mathrm{Sp}(W)$. On note encore ω_ψ la restriction de la R-représentation de Weil à $\widetilde{H_1} \times \widetilde{H_2}$. Le résultat suivant constitue l'aboutissement de la Section 4. Il est le premier pas en direction d'une correspondance thêta modulaire en donnant un cadre d'étude clair pour les analogues des points (ii) et (iii) de la correspondance thêta classique. Le carrefour dont on a parlé s'opère directement après ce théorème.

Théorème B (Définition de $\Theta(\pi_1)$)**.** *On suppose que R est algébriquement clos. Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(\widetilde{H_1})$. Alors il existe une représentation $\Theta(\pi_1) \in \mathrm{Rep}_R(\widetilde{H_2})$ telle que le plus grand quotient π_1-isotypique $(\omega_\psi)_{\pi_1}$ de ω_ψ soit isomorphe à $\pi_1 \otimes \Theta(\pi_1)$ dans $\mathrm{Rep}_R(\widetilde{H_1} \times \widetilde{H_2})$.*

On suppose maintenant que F est local non archimédien. On rappelle que le cosocle d'un module est le quotient dudit module par l'intersection de ses modules propres maximaux. Quand le cosocle de la représentation $\Theta(\pi_1)$ est semi-simple, on peut définir le plus grand quotient semi-simple $\theta(\pi_1)$ de $\Theta(\pi_1)$, qui est donc son cosocle. C'est le cas par exemple si $\Theta(\pi_1)$ est de longueur finie. Supposons que l'on puisse définir $\theta(\pi_1)$ pour un moment. On énonce les analogues évidents des points (*ii*) et (*iii*) de la correspondance thêta classique sous la forme de deux questions : la représentation $\theta(\pi_1)$ est-elle irréductible ? quand elle l'est, a-t-on unicité au sens où $\theta(\pi_1) \simeq \theta(\pi_1') \Rightarrow \pi_1 \simeq \pi_1'$? On y réfère comme les *énoncés de la correspondance* portant sur *l'irréductibilité* et *l'unicité*. Mínguez a étudié [Mín06] en détail le cas des paires de type II. Dans ce travail de thèse, on se concentre sur les paires de type I qui demandent un traitement complètement différent. Il existe néanmoins des contre-exemples à l'irréductibilité de $\theta(\pi_1)$ dans le cas non banal : Mínguez en fournit un pour les paires de type II ; cette thèse en fournit un autre dans la Section 7.2 pour les paires de type I. Le premier cas qu'il vient à l'esprit de tester concerne les fameuses briques élémentaires déjà mentionnées : les représentations cuspidales. Dans le cas classique, Kudla a d'abord prouvé [Kud86] que pour des paires symplectique-orthogonale (type I), les énoncés sur l'irréductibilité et l'unicité étaient vrais pour les cuspidales. Ce resultat a ensuite été étendu [MVW87] à toute paire de type I. Ces deux approches ont en commun une utilisation fine de deux filtrations que l'on nomme filtration de Kudla et filtration de Rallis. La première, introduit en quelque sorte une forme de récurrence pour traiter les problèmes en jeu en se ramenant à une paire duale de même type, mais de rang plus petit. Ce sont les techniques des tours de Witt que l'on va présenter dans un moment. En ce qui concerne le travail de Rallis [Ral84], il porte à l'origine sur une méthode qui introduit la notion de paires duales balançoires et qui porte le nom de *doubling method*. On en exposera le cadre sans pouvoir la décrire précisément, mais pour le dire de manière très grossière, cela revient à « doubler » la paire duale pour se ramener au cas de la représentation triviale en étudiant $\Theta(1)$. Pour plus de précision, on invite le lecteur à se reporter à la Section 5.1.

Le cas des paires de type I

Les méthodes de Kudla et Rallis, que l'on vient de citer, pour étudier les paires de type I vont être maintenant décrites. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire quelques considérations techniques en définissant les tours de Witt et les conventions dont on se dote pour la R-représentation de Weil dans ces tours. Dorénavant, F est un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2, de caractéristique résiduelle p et de cardinal résiduel q ; R est un corps algébriquement clos de caractéristique ℓ différente de 2 et p, dans lequel on a fixé une racine carré de q. On généralise dans la Section 5.1 la procédure de [MVW87] qui mène à la correspondance modifiée.

Soit D un corps qui est, soit F lui-même, soit une extension quadratique de F, soit l'unique corps de quaternions sur F. Soit W_1^0 un espace ε_1-hermitien sur D qui est anisotrope. Pour $m_1 \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_1^{m_1} = W_1^0 + m_1 \mathbb{H}$$

où $\mathbb{H}$ est le plan hyperbolique ε_1-hermitien. L'ensemble $\{W_1^{m_1} \mid m_1 \in \mathbb{N}\}$ est appelée une *tour de Witt*. De même, soit W_2^0 un espace ε_2-hermitien sur D qui est anisotrope. Soit $W_2^{m_2}$ la tour de Witt associée. On suppose que $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$. Alors $W_1^{m_1} \otimes_D W_2^{m_2}$ est un espace symplectique sur F et $(U(W_1^{m_1}), U(W_2^{m_2}))$ est une paire duale réductive irréductible dans $\mathrm{Sp}(W_1^{m_1} \otimes_D W_2^{m_2})$.

Soit $m_1 \in \mathbb{N}$. Pour tout $m_2 \in \mathbb{N}^*$, les images réciproques $\widetilde{U(W_1^{m_1})}_{W_2^{m_2}}$ de $U(W_1^{m_1})$ dans les différents groupes métaplectiques $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1^{m_1} \otimes_D W_2^{m_2})$ sont toutes isomorphes en tant qu'extension centrale de $U(W_1^{m_1})$ par $R^\times$, mais pas de manière canonique *a priori*. On pose alors :

$$H_1^{m_1} = \begin{cases} \widetilde{U(W_1)}_{W_2^0} & \text{si } W_2^0 \neq 0; \\ U(W_1) \times R^\times & \text{sinon.} \end{cases}$$

On décrit dans la Section 5.1.1 comment fixer des isomorphismes :

$$j^1_{m_1,m_2} : H_1^{m_1} \to \widetilde{U(W_1^{m_1})}_{W_2^{m_2}}.$$

On procède de même en sens inverse en fixant des isomorphismes :

$$j^2_{m_2,m_1} : H_2^{m_2} \to \widetilde{U(W_2^{m_2})}_{W_1^{m_1}}.$$

Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $\omega_\psi \in \mathrm{Rep}_R(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1^{m_1} \otimes_D W_2^{m_2}))$ un modèle de la R-représentation de Weil et :

$$i_{m_1,m_2} : (u_1, u_2) \in H_1^{m_1} \times H_2^{m_1} \to j^1_{m_1,m_2}(u_1) j^2_{m_2,m_1}(u_2) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1^{m_2} \otimes W_2^{m_2}).$$

On pose :

$$\omega_{m_1,m_2} = \omega_\psi \circ i_{m_1,m_2}.$$

On appelle *R-représentation de Weil pour les tours de Witt* la famille de représentations :

$$\{\omega_{m_1,m_2} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{N}\}.$$

Pour $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R(H_1^{m_1})$, on note $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ la classe d'isomorphisme de représentations dans $\mathrm{Rep}_R(H_2^{m_2})$ telle que $(\omega_{m_1,m_2})_{\pi_1} \simeq \pi_1 \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$, et $\theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ son plus grand quotient semi-simple. On peut alors partir en quête des énoncés d'irréductibilité et d'unicité pour $\theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ à l'aide des deux outils principaux évoqués que sont les filtrations de Rallis et de Kudla. On généralise chacune de ces deux dans la Section 5.1. On a d'abord besoin de préciser les conventions liées aux sous-groupes paraboliques.

On peut donner une définition des sous-groupes paraboliques dans $H_1^{m_1}$. Comme ce niveau de généralité n'est pas nécessaire dans cette introduction, on le fait seulement pour les paraboliques maximaux. Pour les groupes classiques, l'ensemble des paraboliques maximaux est en bijection avec l'ensemble des espaces totalement isotropes de $W_1^{m_1}$. Afin de le comparer à ce cas bien connu, on remarque qu'un parabolique maximal de $H_1^{m_1}$ est simplement une extension centrale d'un parabolique maximal de $U(W_1^{m_1})$ par $R^\times$. Le choix d'un drapeau totalement isotrope complet de $W_1^{m_1}$ produit un ensemble des paraboliques standards vis-à-vis de ce drapeau, qu'on note de manière évidente $P_k^{m_1}$ où $k \in [\![0, m_1]\!]$ correspond la dimension du sous-espace totalement isotrope stabilisé. Ainsi, pour toute décomposition de Levi $P_k^{m_1} = M_k^{m_1} \ltimes N_k^{m_1}$ où $N_k^{m_1}$ est un radical unipotent dans $U(W_1^{m_1})$, on a un morphisme de groupes surjectifs qui provient de la multiplication dans $H_1^{m_1}$:

$$G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \twoheadrightarrow M_k^{m_1}$$

où $G_k^{m_1}$ est une extension centrale $\mathrm{GL}_k(D)$ par $R^\times$. On emploie des notations similaires pour $H_2^{m_2}$. De cette manière, les foncteurs d'induction et de restriction parabolique sont bien définis. On peut alors définir les classes d'équivalence de représentations irréductibles cuspidales et supercusidales par $\mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}$ et $\mathrm{Irr}_R^{\mathrm{scusp}}$. On suppose désormais effectués des choix de paraboliques standards et de Levi standards.

La filtration de Rallis porte en un certain sens sur un des cas les plus simples, et a d'abord été établie dans le cas classique par [Ral84] dans le cas symplectique-orthogonal, puis généralisée à toute paire de type I dans [MVW87]. On suppose que $W_2^0 = 0$. Alors $H_1^{m_1} = U(W_1^{m_1}) \times R^\times$. En particulier, cela fait sens de considérer la représentation triviale de $\mathrm{Rep}_R(U(W_1^{m_1}))$ comme une représentation dans $\mathrm{Rep}_R(H_1^{m_1})$ étendue à $R^\times$ en posant $\tau(1,\lambda) = \lambda \mathrm{Id}$. Par abus de notation, on écrira dans cette situation $\Theta(1_{m_1}, W_2^{m_2})$. On note $n_1 = \dim_D W_1^{m_1}$ et $n_2 = \dim_D W_2^{m_2}$. On aura besoin dans la suite de poser $\eta_1 = \varepsilon_1, 0, -\frac{\varepsilon_1}{2}$ selon que D est le corps F, un corps quadratique ou un corps de quaternion. On obtient dans la Section 5.1.2 :

Théorème C. *On pose $s = n_1 - n_2 + \eta_1$. Alors la représentation $\Theta(1_{m_1}, W_2^{m_2})$ est une sous-représentation $I(s) = i_{P_{m_2}^{m_2}}^{H_2^{m_2}}(\nu_s)$, où $P_{m_2}^{m_2} = G_{m_2}^{m_2} \times N_{m_2}^{m_2}$ est le parabolique de Siegel et $\nu_s = \nu_0 |\det|^{\frac{s}{2}}$ est un caractère de $G_{m_2}^{m_2}$.*

De plus, pour toute décomposition orthogonale $W_2^{m_2} = W_{2_1} + (-W_{2_2})$, la représentation $I(s)$ possède une filtration $H_{2_1} \times H_{2_2}$-équivariante dont les sous-quotients sont explicites (cf. Théorème 5.1.2.4) :

$$0 \subset I_0(s) \subset I_1(s) \subset \cdots \subset I_r(s) = I(s)$$

où $r = \min(m_{2_1}, m_{2_2})$ est le minimum des indices de Witt de W_{2_1} et W_{2_2}, et les sous-groupes H_{2_1} et H_{2_2} de $H_2^{m_2}$ sont isomorphes à $\widetilde{U(W_{2_1})}_{W_1^0}$ et $\widetilde{U(W_{2_2})}_{W_1^0}$.

La filtration de Kudla porte sur le foncteur de Jacquet de la R-représentation de Weil, et a d'abord été établie dans le cas classique par [Kud86] dans le cas symplectique-orthogonal, puis généralisée à toute paire de type I dans [MVW87]. Soit $r_k^{m_1}$ le foncteur de restriction parabolique vis-à-vis de $P_k^{m_1} = M_k^{m_1} \ltimes N_k^{m_1}$. Par abus de notation, on considère grâce à la surjection précédente $G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \twoheadrightarrow M_k^{m_1}$ que la restriction parabolique est un foncteur :

$$r_k^{m_1} : \mathrm{Rep}_R(H_1^{m_1}) \to \mathrm{Rep}_R(G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k}).$$

On obtient dans la Section 5.1.3 :

Théorème D. *On a une filtration $G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k}$-équivariante de $r_k^{m_1}(\omega_{m_1,m_2})$ dont les sous-quotients sont donnés de manière explicite (cf. Théorème 5.1.3.1) :*

$$r_k^{m_1}(\omega_{m_1,m_2}) = R^0 \supset R^1 \supset \cdots \supset R^r \supset R^{r+1} = 0$$

où $r = \min(k, m_2)$.

Conséquences des filtrations

On rappelle les principaux résultats qui découlent du calcul des filtrations dans le cas complexe. Pour alléger les notations, on sous-entend les indices m_1 et m_2 quand le contexte est clair. On reprend les notations n_1 et n_2 pour les dimensions de $W_1^{m_1}$ et $W_2^{m_2}$ sur D.

Théorème ([Kud86],[MVW87])**.** *Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(H_1)$. Alors :*

(i) il existe $m_2(\pi_1) \in \mathbb{N}$ tel que $m_2(\pi_1) \leq n_1$ et :

$$\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \neq 0 \Leftrightarrow m_2 \geq m_2(\pi_1) \ ;$$

(ii) pour tout $m_2 \in \mathbb{N}$, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est de longueur finie ;
(iii) On suppose que π_1 est cuspidale.
(a) la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est cuspidale ;
(b) pour tout $m_2 \geq m_2(\pi_1)$, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est irréductible ;
(c) si $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est cuspidale, alors $m_2 = m_2(\pi_1)$;
(iv) plus généralement, on connaît le support cuspidal de tout quotient irréductible de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$.

On s'arrête sur ce théorème pour donner quelques commentaires préparatoires. Le point (i) définit le *premier indice d'occurrence* $m_2(\pi_1)$ dans la tour de Witt. Le point (b) est *l'irréductibilité pour les cuspidales i.e.* le point (ii) du Théorème dans le cas où π_1 est cuspidale. Le point (ii) sur la longueur finie garantit que $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \neq 0$ si et seulement si $\theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \neq 0$. On a de manière évidente que la longueur finie pour les cuspidales (ii) provient de leur irréductibilité (b). Le point (c) affirme qu'il y a un *unique quotient irréductible cuspidal dans toute la tour.* Le point (ii) pour des représentations non cuspidales découlent du cas cuspidal (iii), de même que le calcul du support cuspidal (iv) se fait à partir de celui des représentations cuspidales.

Une des différences majeures, qui va apparaître dans les énoncés, provient du fait que les représentations irréductibles cuspidales ne sont plus forcément des objets projectifs et injectifs de la catégorie $\mathrm{Rep}_R(H_1)$. Seulement, dans le cas où ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$ et $U(W_2^{m_2})$, on aura des résultats aussi satisfaisants que dans le cas complexe. En revanche, le cas ℓ non banal se révèle extrêmement problématique. On ne sait même pas dans ce cas si les représentations $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ sont de longueur finie. Quand ℓ est non nul, il existe un seuil à partir duquel les problèmes arrivent. En effet, si ℓ est non nul et m_2 est suffisamment grand, alors ℓ divise le pro-ordre de $U(W_2^{m_2})$. Cela donne lieu à la définition suivante. Si $\ell \neq 0$ et ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_2^0)$, on définit :

$$m_2(\mathrm{ban}) = \max\{m_2 \in \mathbb{N} \mid \ell \text{ ne divise pas } |U(W_2^{m_2})|\}.$$

Par convention, $m_2(\mathrm{ban}) = +\infty$ si $\ell = 0$.

On prouve dans la Section 5.2 :

Théorème E (Premier indice d'occurrence)**.** *Pour tout $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$, il existe $m_2(\pi_1) \in \mathbb{N}$ tel que $m_2(\pi_1) \leq n_1$ et :*

$$\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \neq 0 \Leftrightarrow m_2 \geq m_2(\pi_1).$$

Quand π_1 est cuspidale, voici les analogues du point (iii) du théorème obtenus dans ce travail dans le cas banal. Dans la Section 5.2.2, on établit également des résultats dans le cas non banal qui se révèlent plus fins et que l'on invite à comparer à ceux que l'on présente ici. Le point (b) se révèle différent du cas complexe à cause de l'existence du rang $m_2(\mathrm{ban})$ au-delà duquel l'hypothèse de banalité échoue.

Théorème F (Cuspidalité de la première occurrence)**.** *Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$.*
(a) La représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est cuspidale.

Théorème G (Irréductibilité pour les cuspdiales)**.** *On suppose que ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$ et que $m_2(ban) \geq n_1$. Alors pour toute représentation $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$:*
(b) pour tout $m_2 \in \mathbb{N}$ tel que $m_2(ban) \geq m_2 \geq m_2(\pi_1)$, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est irréducitble ;

(c) si $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *admet un quotient cuspidal, alors* $m_2 = m_2(\pi_1)$ *;*

(iv) on connaît explicitement le support cuspidal de tout quotient irréductible de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *en fonction de celui de* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$*.*

Pour $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$ donné, on peut affaiblir $m_2(\mathrm{ban}) \geq n_1$ en $m_2(\mathrm{ban}) \geq m_2(\pi_1)$. Afin de donner des hypothèses aussi faibles que possible, cette distinction est faite de manière récurrente dans la Section 5.2.2 bien qu'on ne la présente pas ici. On renvoie également à la Section 5.2.2 pour un énoncé plus précis en ce qui concerne le support cuspidal quand $m_2(\mathrm{ban}) \geq n_1$ et ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$. Cependant, peu de choses sont connues sur la longueur finie quand $\ell \neq 0$. Le problème reste donc ouvert dans le cas général même si l'on s'attend à ce que cela soit vrai. On a néanmoins le résultat suivant, sur lequel on va donner quelques précisions :

Théorème H (Longueur finie pour les cuspidales)**.** *On suppose que les paires considérées sont commutatives. Soit* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$*. Alors, si la représentation cuspidale* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ *est irréductible et injective, la représentation* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est de longueur finie pour tout* $m_2 \geq 0$*.*

Dans le Théorème G, la représentation cuspidale $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est irréductible et injective. On en déduit que les représentations $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ sont de longueur finie pour les paires commutatives quand $m_2(\mathrm{ban}) \geq n_1$ et ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$. Malheureusement, on ne sait pas prouver ce fait en général *i.e.* quand les paires sont quaternioniques ou en retirant les hypothèses de banalité.

Quand π_1 n'est pas cuspidale, on prouve dans la Section 5.2.3 que la longueur finie se déduit de la longueur finie pour les cuspidales. Une fois de plus, on ne donne que la version dans le cas banal bien que des résultats plus fins soient disponibles dans le cas non banal dans la Section 5.2.3. Pour plus de détail sur l'énoncé concernant le support cuspidal, on renvoie à la même section.

Théorème I. *On suppose que* $m_2(ban) \geq n_1$ *et* ℓ *est banal vis-à-vis de* $U(W_1)$*. Alors, pour toute représentation* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$ *qui n'est pas cuspidale :*

(ii) pour tout $m_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $m_2 \leq m_2(ban)$*, la représentation* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est de longueur finie. De plus, si les paires duales considérées sont commutatives, la représentation* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est de longueur finie pour tout* $m_2 \in \mathbb{N}$*.*

(iv) on sait calculer le support cuspidal de tout quotient irréductible de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$*.*

Une preuve conditionnelle de la correspondance

Dans la dernière partie de ce travail, on généralise la preuve de la correspondance par Gan et Takeda [GT16] quand la caractéristique ℓ est suffisamment grande, sous une hypothèse que l'on pense pouvoir éliminer à terme. Avant de préciser le résultat que l'on obtient, on introduit quelques notations et on précise cette hypothèse, qui est réputée vraie dans le cas complexe [KR92, Swe95, KS97] et dont on trouve un résumé concis dans [GI14, §7 - §8]. Même si cela sort du cadre que l'on considère ici, on signale que cela est aussi vrai pour les paires duales quaternioniques [Yam11].

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2, de caractéristique résiduelle p et de cardinal résiduel q_F. Soit R un corps de caractéristique ℓ différente de p et 2. On suppose fixée une racine carrée de q_F dans R. On désigne ici par E le corps

F lui-même ou un extension quadratique de F. On note q_E le cardinal résiduel de E et $o_R(q_E)$ l'ordre de q_E dans $R^\times$. Soit $(U(W_1), U(W_2))$ une paire duale irréductible de type I commutative dans $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes_E W_2)$. On note n_1 et n_2 leurs dimensions respectives sur E et on rappelle que $\eta_1 = \varepsilon_1, 0$ selon que E est F lui-même ou une extension quadratique E de F. Quitte à échanger W_1 et W_2, on suppose que $n_2 \leq n_1 + \eta_1$ et on pose alors $s = n_2 - n_1 + \eta_1$, de sorte que $s \leq 0$. Enfin, m_1 et m_2 désigne l'indice de Witt de W_1. On reprend les notations précédentes en les allégeant en posant $H_1 = H_1^{m_1}$ et $H_2 = H_2^{m_2}$.

Hypothèse (H). Soit $\mathbb{W}_1 = W_1 + (-W_1)$. Le couple $(U(\mathbb{W}_1), U(W_2))$ est alors une paire duale dans $\mathrm{Sp}(\mathbb{W}_1 \otimes_E W_2)$. En posant $H_1' = \widetilde{U(\mathbb{W}_1)}_{W_2^0}$, notre hypothèse, dont on expliquera ensuite le caractère raisonnable, est la suivante :

(H) Il existe un morphisme surjectif de $\mathrm{Rep}_R(H_1')$:

$$I(-s) = i_{P_{n_1}}^{H_1'}(\nu_{-s}) \twoheadrightarrow \Theta(1, W_1 + (-W_1))$$

où P_{n_1} est le parabolique de Siegel dans H_1' et ν_{-s} est un caractère paramétré par la norme, au sens où $\nu_{-s} = \nu_0 |\det_F|^{-\frac{s}{2}}$ avec ν_0 un caractère du Levi G_{n_1} de P_{n_1}.

On conjecture que (H) est vraie dans le cas modulaire indépendamment de la caractéristique. L'objet de la Section 6 est de prouver ce qui constitue l'aboutissement de ce travail de thèse :

Théorème J. *On suppose que l'hypothèse* (H) *est satisfaite et que $o_R(q_E) > n_1 + 2m_1$. Alors pour toute représentation $\pi \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$:*

- *le plus grand quotient semi-simple $\theta(\pi_1, W_2)$ de $\Theta(\pi_1, W_2)$ est irréductible quand $\Theta(\pi_1, W_2) \neq 0$;*
- *quand $\Theta(\pi_1, W_2) \neq 0$, on a :*

$$\theta(\pi_1) = \theta(\pi_1') \Leftrightarrow \pi_1 \simeq \pi_1'.$$

En pratique, quand F, n_1 et n_2 sont fixés, il n'existe qu'un nombre fini de premiers ℓ tels que la situation $o_R(q_E) \leq n_1 + 2m_1$. En particulier, la condition $o_R(q_E) > n_1 + 2m_1$ implique que ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$ et $U(W_2)$. Dans la Section 7.2, on construit un contre-exemple à l'irréductibilité de $\theta(\pi_1, W_2)$ quand ℓ n'est pas pas banal. C'est un fait important puisque la correspondance thêta n'a aucune chance d'être une bijection dans ce cas.

Hypothèse (H) et compatibilité à la réduction : un problème immédiat

Dans le cas complexe, l'hypothèse (H) est toujours vérifiée. On note désormais le corps des coefficients de la représentation en question. Quand $s \leq 0$, la représentation $\Theta_{\mathbb{C}}(1, W_1 + (-W_1))$ précédente est irréductible. Il y a alors deux manières de prouver que la surjection précédente existe.

La première est qu'il existe un foncteur contravariant F de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(H_1')$ dans elle-même, obtenu comme le composé du foncteur contragrédient et d'une involution dualisante appelée involution MVW, qui est exact et tel que $F(\Theta_{\mathbb{C}}(1, W_1 + (-W_1))) \simeq \Theta_{\mathbb{C}}(1, W_1 + (-W_1))$ et $F(I(s)) \simeq I(-s)$. Il suffit alors de l'appliquer à l'inclusion $\Theta_{\mathbb{C}}(1, W_1 + (-W_1)) \hookrightarrow I(s)$ pour obtenir la surjection désirée.

La seconde consiste à étudier les opérateurs d'entrelacement $I(-s) \to I(s)$ qui entrent dans une théorie plus générale. En particulier, on sait paramétrer ces opérateurs de manière méromorphe en la variable s et définir leurs facteurs de normalisation. On montre alors classiquement qu'il existe un morphisme $I(-s) \to I(s)$ dont l'image est semi-simple et contient la représentation irréductible $\Theta_{\mathbb{C}}(1, W_1 + (-W_1))$.

À l'heure actuelle, on ne sait pas si $\Theta_{\overline{\mathbb{F}_\ell}}(1, W_1 + (-W_1))$ est irréductible ou non, bien que l'on conjecture que ce soit vrai si ℓ est très grand vis-à-vis de n_1, n_2 et q. Si tel était le cas, comme l'analogue de l'involution MVW est bien définie dans le cas modulaire, il existerait alors une preuve directe identique à la première qui assurerait que l'hypothèse (H) est vérifiée, au moins pour ℓ suffisamment grand. Cela ramène donc au problème de prouver l'irréductibilité de $\Theta_{\overline{\mathbb{F}_\ell}}(1, W_1 + (-W_1))$. Pour l'instant, les arguments de compatibilité à la réduction $\overline{\mathbb{Z}_\ell} \to \overline{\mathbb{F}_\ell}$ que l'on développe dans la Section 7 font apparaître de sérieux doutes quant à la possibilité d'obtenir l'irréductibilité de $\Theta_{\overline{\mathbb{F}_\ell}}(1, W_1 + (-W_1))$ à partir d'un modèle entier de la représentation irréductible $\Theta_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(1, W_1 + (-W_1))$. Si l'on revient un instant au cas complexe, la stratégie pour prouver ce résultat consiste à étudier précisément les constituants des induites $I(s)$ et fait un usage intensif de la théorie des opérateurs d'entrelacement $I(-s) \to I(s)$. Par conséquent, la deuxième option paraît être un point inévitable. Ce point reste à explorer en utilisant la théorie des opérateurs d'entrelacement et de leurs réductions, tel que développée dans [Dat05], et promet l'apparition de phénomènes intéressants.

Perspectives

La correspondance thêta ℓ-modulaire développée dans ce travail soulève de nombreuses questions. Outre ces questions liées aux opérateurs d'entrelacement $I(-s) \to I(s)$, une des premières est de développer la théorie esquissée dans la Section 7 pour comprendre un peu mieux la manière dont cette correspondance se comporte vis-à-vis de la réduction modulo ℓ. Cela signifie, étant donné une représentation à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ qui possède un modèle entier à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et qui se réduit en une représentation à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}_\ell}$, quel est le comportement de la correspondance vis-à-vis de cette opération de réduction ? On peut également explorer les propriétés et contre-exemples qui apparaissent dans le cas non banal, afin de mieux comprendre les phénomènes en jeu. Enfin, pour ce qui est des perspectives immédiates envisageables, il existe une preuve de la correspondance dans le cas quaternionique par [GS17]. Sa validité dans le cas modulaire reste à prouver.

Pour ce qui est de perspectives plus lointaines, une preuve de la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GSp}_4(F)$ a été donnée dans [GT11] et utilise la correspondance thêta généralisé *i.e.* pour les groupes de similitude. Avant toute chose, un des pré-requis en direction de ce résultat serait de généraliser les relations de conservation prouvées au cas modulaire. Ces relations sont longtemps restées conjecturales, bien que certains cas étaient connus, et ont été prouvés assez récemment [GS17]. Elles affirment que les premiers indices d'occurrence pour des tours de Witt $W_2^{m_2,+}$ et $W_2^{m_2',-}$ distinctes sont en réalité liés par une formule qui est assez explicite. Enfin, il s'agirait également de généraliser la correspondance thêta pour les groupes de similitude développée dans [Rob96].

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Représentations lisses modulaires des groupes localement profinis

Tout le long du manuscrit, R désignera un anneau commutatif unitaire et G un groupe topologique. On dit qu'un $R[G]$-module V est *lisse* si le stabilisateur $\mathrm{Stab}_G(v)$ de tout élément $v \in V$ est ouvert dans G. On dira aussi que V est une *représentation lisse de* G à coefficients dans R. Quand le contexte sera clair, les références à l'anneau R et à la lissité pourront être omises en disant simplement que « V est une représentation de G ». Toute action linéaire donne lieu à un morphise de groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$. On donne une formulation équivalente qui sera commode par la suite. On munit V de la topologie discrète. On a que $\mathrm{GL}(V)$ est un groupe topologique pour la topologie de la convergence simple $V \to V$. Une prébase d'ouverts est :

$$U_{w,v} = \{M \in \mathrm{GL}(V) \mid Mv = w\}$$

pour $v, w \in V$. Rappelons le fait suivant qui pourra être utile : une application entre deux espaces topologiques est continue si et seulement si l'image réciproque de tout élément de la prébase est ouverte. En munissant $\mathrm{GL}(V)$ de la topologie associée à la prébase d'ouverts $(U_{v,w})$, on obtient qu'un $R[G]$-module est lisse si et seulement si le morphisme de groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$ associé est continu.

On note $\mathrm{Rep}_R(G)$ la catégorie des $R[G]$-modules lisses, avec comme morphismes les applications R-linéaires G-équivariantes. C'est une catégorie abélienne avec des sommes directes et des produits directs. On désigne par $\mathrm{Irr}_R(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples de cette catégorie.

1.1.1 Groupe localement profini et mesure de Haar

Un *espace localement profini* est un espace topologique séparé tel que chaque point admette une base de voisinage d'ouverts compacts. Les résultats de cette partie sont un simple rappel de [Vig96].

Définition 1.1.1.1. Un groupe localement profini est un groupe topologique dont l'espace topologique sous-jacent est localement profini.

Il existe d'autres caractérisations de ces groupes topologiques. Notamment : il existe une base de voisinages de l'élément neutre constituée de sous-groupes ouverts compacts. La topologie localement profinie est aussi nommée topologie localement compacte et totalement discontinue. D'où la dénomination de « groupe (l.c.) t.d. » parfois rencontrée. On renvoie à [BH06] ou [Ren09] ou encore [Vig96] pour plus de détail sur cette classe de groupes. On relève simplement les deux faits suivants : tout sous-groupe fermé d'un groupe localement profini est localement profini ; il en va de même de tout quotient par un sous-groupe fermé. Dans toute la suite, G désigne un groupe localement profini et R un anneau commutatif unitaire.

Pro-ordre. Un entier *supernaturel* n est une fonction de l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, notée aussi $n = \prod p^{n(p)}$. Un entier naturel est alors un entier supernaturel de support fini à valeur finie. Le *pro-ordre* $|K|$ d'un groupe profini K est le plus petit commun multiple – au sens des entiers supernaturels – des indices $[K : K']$, où K' parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de K. Cette définition s'étend naturellement à tout groupe localement profini G en prenant le plus petit commun multiple des pro-ordres de ses sous-groupes ouverts compacts. Par exemple, si $G = F$ désigne :
— un corps fini, son pro-ordre est le cardinal de F ;
— un corps p-adique, son pro-ordre est p^∞ ;
— une extension finie de $\mathbb{F}_p((t))$, son pro-ordre est p^∞.
On note aussi :

$$[K : K'] = \frac{[K : (K \cap K')]}{[K' : (K \cap K')]}$$

l'indice généralisé de deux sous-groupes ouverts compacts K et K' de G.

Proposition 1.1.1.2 ([Vig96, I.1.6])**.**

1. *Soit* $1 \to H \to G \to G/H \to 1$ *une suite exacte de groupes localement profinis. Alors on a égalité des pro-ordres :*

$$|H| = |K| \times |H/K|.$$

2. *Soit K un groupe profini. Soit H un sous-groupe fermé. Le pro-ordre de H divise celui de K.*
3. *Soient G un groupe localement profini et l un entier positif tels que $|G|$ et l soient premiers entre eux. Alors pour tout sous-groupe fermé H de G, le pro-ordre $|H|$ et l'entier l sont premiers entre eux.*

Mesure de Haar. On appelle *caractéristique de R* l'entier naturel n qui engendre le noyau de $i : k \in \mathbb{Z} \to k.1 \in R$. Un nombre entier est dit inversible dans R si son image par i l'est. Plus généralement, un entier supernaturel est dit *inversible* si tous ses facteurs premiers sont inversibles. Soit $C_c^\infty(G)$ le R-module des fonctions $f : G \to R$ localement constantes à support compact. Quand le contexte le nécessite, on insistera sur les coefficients en écrivant $C_c^\infty(G; R)$. Une *mesure* sur G est alors une forme R-linéaire de $C_c^\infty(G)$ dans R. Une *mesure de Haar (à gauche, resp. à droite)* sur G est une mesure non-nulle μ_G qui est invariante par translation à gauche (resp. à droite) de G. Il y a des conditions d'existence et d'unicité relatives aux mesures de Haar :

Théorème 1.1.1.3. [Vig96, I.2.4.] *Il existe un sous-groupe compact ouvert K de G dont le pro-ordre est inversible dans R si et seulement s'il existe une mesure de Haar μ sur G à* *valeurs dans R telle que :*

$$\mu(K) = 1.$$

De plus, quand elle existe, une telle mesure est unique. On appelle celle-ci la mesure de Haar normalisée de K, que l'on note μ_K. On écrit dans ce cas pour $f \in C_c^\infty(G)$:

$$\mu(f) = \int_G f(g) d\mu(g).$$

Remarque 1.1.1.4. Pour éviter d'encombrer le texte avec des questions de normalisation quand on se retrouve sur un anneau R quelconque, on écrira simplement « mesure de Haar » en sous-entendant « mesure de Haar normalisée sur un sous-groupe compact ouvert de pro-ordre inversible ».

On suppose dorénavant qu'il existe une mesure de Haar μ sur G à valeurs dans R.

Corollaire 1.1.1.5. *Soit σ un automorphisme bicontinu de G, et $\sigma.\mu = \mu \circ \sigma$ la mesure de Haar associée. Alors il existe un unique $\delta_G(\sigma) \in R^\times$ tel que $\sigma.\mu = \delta_G(\sigma)\mu$. Et ce scalaire ne dépend pas du choix de μ. Enfin, pour tout sous-groupe compact ouvert K de G de pro-ordre inversible dans R, on a une expression explicite à l'aide de l'indice généralisé :*

$$\delta_G(\sigma) = [\sigma(K) : K].$$

On appelle alors *module de G* l'application δ_G qui à tout automorphisme bicontinu σ associe cet unique élément $\delta_G(\sigma)$. C'est un caractère du groupe des automorphismes bicontinus, muni de la loi de composition, qui est à valeurs dans $R^\times$. On dit qu'un groupe G est *unimodulaire* si son module est trivial sur le sous-groupe des automorphismes intérieurs de G. Le lemme suivant donne une condition pour qu'un automorphisme bicontinu ait un module trivial :

Lemme 1.1.1.6. *Soit σ un automorphisme bicontinu de G. On suppose qu'il stabilise un sous-groupe compact ouvert de G de mesure non-nulle. Alors $\sigma.\mu = \mu$. C'est en particulier vrai si σ est d'ordre fini.*

Démonstration. Soit K un sous-groupe ouvert compact fixé par σ et de mesure non-nulle. On a alors $\delta_G(\sigma) = [\sigma(K) : K] = 1$ *i.e.* $\sigma.\mu = \mu$. Si maintenant σ est d'ordre fini, pour n'importe quel compact K de mesure non-nulle, on a que $K_0 = \cap_{i \in \mathbb{Z}} \sigma^i(K)$ est un sous-groupe compact ouvert de mesure non-nulle fixé par σ. □

Corollaire 1.1.1.7. *Si G est unimodulaire, les mesures de Haar à gauche et à droite coïncident. Et on peut étendre le lemme précédent aux anti-automorphismes bicontinus de G.*

Mesure de Haar quotient. Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit χ un caractère de H à valeurs dans $R^\times$. Pour suivre les conventions habituelles [Vig96, I.2.8], [BH06, I.3.4], on note $C_c^\infty(H \backslash G, \chi)$ le R-module des fonctions localement constante à support compact modulo H et qui sont χ-équivariante à gauche pour H. On définit la mesure quotient de $H \backslash G$ [Vig96, I.2.8] :

Proposition 1.1.1.8. *On suppose qu'il existe un sous-groupe compact ouvert de G de pro-ordre inversible dans R. Soient μ_G une mesure de Haar à droite sur G et μ_H une mesure de Haar à droite sur H. On pose $\chi = \delta_H \delta_G|_H^{-1}$. L'application :*

$$\begin{array}{rccc} p_H : & C_c^\infty(G) & \longrightarrow & C_c^\infty(H\backslash G, \chi) \\ & f & \longmapsto & \left(g \mapsto \int_H f(hg)\ \chi(h)^{-1} d\mu_H(h) \right) \end{array}$$

est un G-morphisme surjectif. Il existe une unique forme linéaire $\mu_{H\backslash G}$ non nulle G-invariante à droite sur l'espace $C_c^\infty(H\backslash G, \chi)$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C_c^\infty(G) \arrow[r, "\mu_G"] \arrow[d, "p_H"] & R . \\ C_c^\infty(H\backslash G, \chi) \arrow[ur, "\mu_{H\backslash G}"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque 1.1.1.9. Il y a au moins deux remarques à faire sur ces mesures quotients. Tout d'abord, la mesure quotient $\mu_{H\backslash G}$ obtenue dépend à la fois de μ_G et de μ_H. Par abus de langage, on l'appelle parfois *la* mesure quotient car il y a unicité de ces mesures à multiplication par un inversible de R près. Ensuite, il n'y a pas besoin d'hypothèse supplémentaire pour assurer l'existence d'une mesure de Haar sur H. En effet, l'existence d'un sous-groupe compact ouvert K dans G de pro-ordre inversible dans R entraîne qu'il en existe également un pour H : d'après la Proposition 1.1.1.2, le pro-ordre de $K \cap H$ est inversible dans R puisque c'est un sous-groupe fermé de K. Enfin, on écrit pour $f \in C_c^\infty(H\backslash G, \chi)$:

$$\mu_{H\backslash G}(f) = \int_{H\backslash G} f(h) d\mu_{H\backslash G}(h).$$

Algèbre de Hecke. On suppose qu'il existe une mesure de Haar μ sur G à valeurs dans R. *L'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}_R(G)$ de G sur R est la classe d'isomorphisme de l'algèbre formée par le R-module $C_c^\infty(G)$ muni du produit de convolution induit par μ défini pour $f, f' \in C_c^\infty(G)$ par :

$$f \star_\mu f' : x \longmapsto \int_G f(g) f'(g^{-1}x) d\mu(g).$$

On définit également $\mathcal{H}_R(G, K)$ qui est la sous-algèbre de $\mathcal{H}_R(G)$ des fonctions bi-invariantes – *i.e.* invariante à gauche et à droite – par les éléments de K. Pour un sous-groupe compact ouvert K de pro-ordre inversible dans R, on appelle *idempotent associé à K* l'indicatrice de K normalisée par son volume $e_K = \mu(K)^{-1} 1_K$. Dans ce cas, e_K est une unité de $\mathcal{H}_R(G, K) = e_K \star \mathcal{H}_R(G) \star e_K$. Un $\mathcal{H}_R(G)$-module à gauche M est dit non-dégénéré si $\mathcal{H}_R(G) M = M$. On note $\mathrm{Mod}_{\mathcal{H}_R(G)}$ la catégorie des $\mathcal{H}_R(G)$-modules non-dégénérés.

Proposition 1.1.1.10. *On a une équivalence de catégories entre* $\mathrm{Rep}_R(G)$ *et* $\mathrm{Mod}_{\mathcal{H}_R(G)}$.

Il est donc associé à tout $R[G]$-module lisse (π, V) un morphisme $\pi : \mathcal{H}_R(G) \to \mathrm{End}_R(V)$ défini sur les éléments $f \in \mathcal{H}_R(G)$ par :

$$\pi(f) : v \to \int_G f(g) \pi(g) v d\mu(g).$$

1.1.2 Actions de groupes sur les espaces localement profinis et distributions invariantes

Le résultat original est dans [GK71, Th. 1], puis a été généralisé dans [BZ76, 6.]. On en donne la version et la preuve de Gelfand-Kazhdan, car la preuve (et les hypothèses) de Bernstein-Zelevinski ne semblent pas exploitables pour tout corps R, et il faudrait prêter attention à la caractéristique, ce qu'on ne préfère évidemment pas. Nous préférons plutôt nous concentrer sur la preuve du résultat dans le cas du faisceau des fonctions lisses à support compact C_c^∞ et donner une preuve inconditionnelle dans l'esprit de [GK71].

Soit G un groupe localement profini. Soit X un espace localement profini sur lequel G agit de manière continue via γ. Les faits suivants proviennent de [BZ76, §6]. On dit que l'action de G sur X est *régulière* si le graphe de cette action est fermé. De plus, l'action est régulière si et seulement si l'espace topologique quotient X/G est séparé. On dit qu'un sous ensemble d'un espace topologique est *constructible* s'il est réunion d'un nombre fini de sous-ensembles localement fermés. L'action de G sur X sera dite *constructible* si le graphe associé est constructible.

Dans le cas d'une action constructible, les orbites sont localement fermées, ce sont donc encore des espaces localement profinis pour la topologie induite. Il existe un ouvert non-vide U de X sur lequel l'action de G sur U est régulière. De plus, si le groupe G est dénombrable à l'infini – *i.e.* réunion dénombrable d'ensembles compacts, on a que G/Stab_x est homéomorphe à $G.x$ d'une manière évidente. S'il existe une mesure de Haar sur $G.x$ invariante pour l'action de G, on note $\mu_{G.x}$ celle-ci. S'il n'en existe pas, on prend par convention $\mu_{G.x}$ la mesure nulle. On rappelle enfin qu'une distribution est simplement une forme linéaire sur $C_c^\infty(X)$.

Théorème 1.1.2.1. *Soit γ une action constructible de G sur X. On suppose donné un homéomorphisme $\sigma : X \to X$ qui vérifie :*

1. *pour tout $g \in G$, il existe $g_\sigma \in G$ tel que $\gamma(g) \circ \sigma = \sigma \circ \gamma(g_\sigma)$;*
2. *s'il existe une distribution T non-triviale et G-invariante sur une orbite S, alors $\sigma(S) = S$ et $\sigma.T = T$.*

Alors toute distribution G-invariante sur $C_c^\infty(X)$ est σ-invariante.

Démonstration. Soit T une distribution G-invariante. D'après le premier point, $\sigma.T$ est encore G-invariante. Donc $\sigma.T-T$ est une distribution G-invariante dont on note $\mathrm{supp}(\sigma.T-T)$ le support. Par définition, c'est un fermé dans X. Il est de plus G-invariant puisque $\sigma.T - T$ l'est. Il est donc constitué d'orbites de l'action de G sur X. S'il est non-vide, comme l'action est constructible, il existe un ouvert non-vide S dans $\mathrm{supp}(\sigma.T - T)$ qui est réunion d'orbite et pour lequel l'action de G sur S est régulière. En particulier, toute orbite contenue dans S est fermée dans S. En effet, pour toute orbite S_1, S_2 dans S, on a $\bar{S_1} \cap \bar{S_2}$ qui est vide si S_1 est distincte de S_2 puisque S/G est séparé. On note ensuite $U = {}^c\mathrm{supp}(\sigma T - T) \cup S$ qui est un ouvert de X, S est alors fermé dans U. Enfin, si $f \in C_c^\infty(U)$, on note $f_Z \in C_c^\infty(Z)$ sa restriction à un fermé Z de U.

Montrons que pour tout $f \in C_c^\infty(U)$ on a $T(f^\sigma - f) = 0$, ce qui contredira l'hypothèse sur le support. Soit $f \in C_c^\infty(U)$. On écrit $S = \cup_I S_i$ comme réunion de ses orbites, où l'ensemble I est en bijection avec S/G.

Soit $i \in I$. D'après le paragraphe précédent, S_i est fermé dans S. C'est alors un fermé de U, donc on a bien $f_{S_i} \in C_c^\infty(S_i)$. Le point 2 entraîne qu'il existe une famille finie de fonctions $h_k \in C_c^\infty(S_i)$ et d'éléments $g_k \in G$ tels que $f_{S_i}^\sigma - f_{S_i} = \sum h_{i,k}^{g_{i,k}} - h_{i,k}$ (cf. le préambule à la Proposition 1.1.2.4). On relève chaque $h_{i,k} \in C_c^\infty(S_i)$ arbitrairement en une fonction $f_{i,k} \in C_c^\infty(U)$. On pose :

$$V'(S_i) = \{x \in U \mid f(x) \neq \sum {f'}_{i,k}^{g_{i,k}}(x) - f'_{i,k}(x)\}.$$

C'est un ensemble qui est ouvert, fermé, et compact dans U, et d'intersection vide avec S_i. Soit $V(S_i) = p^{-1}(p(V'(S_i))$ où $p : U \to U/G$ est la projection. On voit facilement que $V(S_i)$ est un sous-ensemble saturé strict de U, qui est ouvert et fermé par définition de la topologie quotient. On pose alors $U(S_i) = U - V(S_i)$, qui est un ensemble saturé ouvert-fermé non-vide.

On procède ainsi pour tout $i \in I$. Comme f_S est à support compact et les $(U(S_i))_{i\in I}$ forment un recouvrement de S, on peut extraire un sous-recouvrement fini du support de f_S dont on note $J \subset I$ l'ensemble fini associé. On peut construire à partir de ce recouvrement fini un raffinement $(U_k)_{k\in K}$ de sorte que : K soit un ensemble fini ; chaque U_k soit un ensemble saturé ouvert-fermé ; les U_k soient deux-à-deux disjoints ; il existe une application $\alpha : K \to J$ telle que $U_k \subset U(S_{\alpha(k)})$. Posons enfin :

$$f_{i,l}(x) = \begin{cases} {f'}_{i,l}(x) \text{ si } x \in U_k \text{ et } \alpha(k) = l \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On obtient donc un ouvert-fermé $V = \cup_K U_k = \cup_J U(S_j)$ sur lequel $f_V^\sigma - f_V = \sum f_{i,l}^{g_{i,l}} - f_{i,l}$, et dont on note ${}^cV$ le complémentaire dans U. Ainsi :

$$T(f^\sigma - f) = T(f_V^\sigma - f_V) + T(f_{{}^cV}^\sigma - f_{{}^cV}) = 0.$$

En effet, le deuxième terme $T((f^\sigma - f)_{{}^cV})$ est nul par définition du support de T. Le premier l'est aussi en vertu de l'égalité $f_V^\sigma - f_V = \sum f_{i,l}^{g_{i,l}} - f_{i,l}$ et par invariance de T sous G. □

Corollaire 1.1.2.2. *On suppose que G est dénombrable à l'infini. Soit γ une action constructible de G sur X. On suppose donné un homéomorphisme $\sigma : X \to X$ qui vérifie :*

1. *pour tout $g \in G$, il existe $g_\sigma \in G$ tel que $\gamma(g) \circ \sigma = \sigma \circ \gamma(g_\sigma)$;*
2. *σ conserve les orbites et leurs mesures i.e. $\sigma(G.x) = G.x$ et $\sigma.\mu_{G.x} = \mu_{G.x}$.*

Alors toute distribution G-invariante sur $C_c^\infty(X)$ est σ-invariante.

Démonstration. Il faut donc montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées. Toutes les orbites sont stables par σ, il s'agit donc de seulement vérifier pour une orbite que localement toute distribution G-invariante est σ-invariante. Une orbite $G.x$ est homéomorphe à l'espace homogène G/Stab_x car G est dénombrable à l'infini. Supposons dorénavant que X est un espace homogène *i.e.* il existe une sous-groupe fermé H de G tel que $X = G/H$. On adapte la preuve de [HC70, Lem. 17] pour montrer :

Lemme 1.1.2.3. *Soit T une distribution G-invariante sur $C_c^\infty(X)$ où $X \simeq G/H$, alors il existe $c \in R$ tel que pour tout $f \in C_c^\infty(X)$:*

$$T(f) = c\int_X f(u)d\mu_{G.x}(u).$$

Démonstration. Ceci provient de l'unicité de la mesure de Haar sur G. Supposons qu'il existe une mesure T (non-nulle) G-invariante sur $C_c^\infty(X)$, on va montrer que $\mu_{G.x}$ factorise la mesure de Haar à gauche sur G. Tout d'abord, le R-module $C_c^\infty(X)$ est isomorphe au R-module $C_c^\infty(G/H, 1)$ des fonctions de $C^\infty(G)$ à support compact modulo H et H-invariante à droite. Si l'on note $\pi : G \to H\backslash G$ la surjection canonique, alors l'application $f \in C_c^\infty(H\backslash G) \mapsto f \circ \pi \in C_c^\infty(H\backslash G, 1)$ est un isomorphisme. En composant la surjection $f \in C_c^\infty(G) \to (g \mapsto \int_H f(gh)d\mu_H(h)) \in C_c^\infty(G/H, 1)$ avec T grâce à l'isomorphisme précédent, on obtient une mesure $C_c^\infty(G) \to R$ qui est invariante à gauche par G. C'est donc un multiple de la mesure de Haar de G. On a donc prouvé que toutes les mesures G-invariantes sur $C_c^\infty(X)$ sont proportionnelles. Il en existe une non-nulle à condition que la mesure de Haar se factorise par la surjection $C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(G/H, 1)$ précédente. Or ceci n'est possible qu'à condition qu'on ait l'égalité $\delta_G|_H = \delta_H$. □

Ainsi toute distribution G-invariante sur une orbite $G.x$ est proportionnelle à $\mu_{G.x}$ d'après le lemme, et $\mu_{G.x}$ est σ-invariante par hypothèse. □

Reformulons ce résultat pour obtenir un fait qui sera utile ensuite. Toute distribution G-invariante est par définition un morphisme G-équivariant de $V = C_c^\infty(X)$ dans R où l'action de G sur R est triviale. Ainsi, on voit facilement qu'il y a un isomorphisme $\mathrm{Hom}_G(V, R) \simeq \mathrm{Hom}_R(V/V(G), R)$ où l'espace vectoriel $V(G)$ est $< g.f - f \mid g \in G, f \in V >$. En d'autres termes, l'espace des distributions G-invariantes s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de $V/V(G)$ dans R. L'espace $V(G)$ est donc l'intersection des noyaux de toutes les distributions G-invariantes sur V. De même, on peut définir $V(\sigma) =< \sigma.f - f \mid f \in V >$. Toute distribution σ-invariante s'identifie alors à un élément de $\mathrm{Hom}_R(V/V(\sigma), R)$. Le théorème précédent se reformule ainsi :

Proposition 1.1.2.4. *Sous les hypothèses du Théorème* 1.1.2.1*, on a $V(\sigma) \subset V(G)$. En particulier, si l'on a $f \in V$ alors $\sigma.f - f \in V(G)$.*

Intégrales orbitales et coinvariants. Soit X un espace localement profini muni d'une action continu d'un groupe localement profini G. On suppose que toute orbite pour cette action est localement fermée dans X, de sorte qu'une orbite est un espace localement profini pour la topologie induite. Notons comme précédemment $\mu_{G.x}$ une mesure sur l'orbite $G.x$ *i.e.* une distribution G-invariante non nulle sur $C_c^\infty(G.x)$, s'il en existe une, ou la distribution nulle sinon.

Définition 1.1.2.5. Soit $f \in C_c^\infty(X)$ et $G.x$ une orbite de l'action de G sur X. On dit que l'intégrale de f *converge* sur $G.x$ s'il existe un ouvert U de X tels que $G.x$ soit fermé dans U et une fonction $h \in C_c^\infty(X)(G) =< g.f - f \mid g \in G, f \in C_c^\infty(X) >$ telle que la restriction de $f - h$ à ${}^cU$ soit nulle. Ainsi la quantité $\mu_{G.x}(f - h)$ a bien un sens. Elle ne dépend ni de U, ni de h, et on l'appelle *intégrale orbitale* de f sur $G.x$.

Pour justifier rapidement que cette définition est consistante, on remarque d'abord que l'on peut toujours supposer que U est un ouvert saturé, quitte à le remplacer par l'ouvert saturé $p^{-1}(p(U))$ dans lequel $G.x$ est encore fermé, où $p : X \to X/G$ est la projection. Ensuite, pour deux ouverts (saturés) U et U' comme dans la définition, $G.x$ est fermé dans $U \cup U'$. On est donc ramené à montrer que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(U \cup U')(G)$, on a $\mu_{G.x}(f) = 0$. Or ce point est évident quand $U \cup U'$ est saturé puisqu'on a alors une surjection $C_c^\infty(U \cup U')(G) \twoheadrightarrow C_c^\infty(G.x)(G)$ induite par la restriction à $G.x$.

Proposition 1.1.2.6. *Soit F un fermé de X stable par l'action de G. Soit $f \in C_c^\infty(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $h \in C_c^\infty(X)(G)$ telle que $f - h$ soit à support dans ${}^cF$;

(ii) pour toute distribution T qui est G-invariante sur $C_c^\infty(X)$ et à support dans F, on a $T(f) = 0$.

(iii) pour toute orbite $G.x$ dans F, l'intégrale de f sur $G.x$ converge et elle est nulle.

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente. On fait une remarque utile et qui montre au passage que $(ii) \Rightarrow (i)$. Se donner d'une distribution G-invariante sur $C_c^\infty(X)$ est équivalent à se donner une forme linéaire sur $C_c^\infty(X)/C_c^\infty(X)(G)$. Et se donner une distribution à support dans F est équivalent à se donner une forme linéaire sur $C_c^\infty(X)/C_c^\infty({}^cF) = C_c^\infty(F)$. Donc si f vérifie (ii), cela entraîne que $f \in C_c^\infty(X)(G) + C_c^\infty({}^cF)$. De manière évidente, $(i) \Rightarrow (iii)$ est toujours vraie.

Le point qui reste se révèle être le plus délicat. On suppose que l'action est constructible. Il suffit de montrer que la restriction $f|_F$ de f à F est dans $C_c^\infty(F)(G)$. En effet, cela signifie qu'il existe un nombre fini de $g_i \in G$ et de $h_i \in C_c^\infty(F)$ tels que $f|_F = \sum g_i.h_i - h_i$. On relève alors h_i en un h'_i quelconque via la surjection $C_c^\infty(X) \twoheadrightarrow C_c^\infty(F)$. Ainsi, la restriction de $f - (\sum g_i.h'_i - h'_i)$ à F est nulle. On est donc ramené à prouver l'énoncé quand $F = X$ *i.e.* à montrer que $f \in C_c^\infty(X)(G)$.

Il est loisible de supposer que U est stable par l'action de G dans la définition des intégrales orbitales, ce que l'on fait désormais. Par hypothèse, on peut fixer pour toute orbite $G.x$ dans X un ouvert $U_{G.x}$ de X et un élément $h_{G.x} \in C_c^\infty(X)(G)$ de sorte que l'intégrale de f associée à $U_{G.x}$ et $h_{G.x}$ converge et soit nulle. D'après le Lemme 1.1.2.3, cela entraîne que $(f - h_{G.x})|_{G.x} \in C_c^\infty(G.x)(G)$. Donc il existe $h'_{G.x} \in C_c^\infty(X)(G)$ tel que $f - h_{G.x} - h'_{G.x}$ s'annule sur $G.x$. Pour chaque orbite $G.x$ dans X, on fixe un tel $h'_{G.x}$.

On procède alors comme dans la preuve du Théorème 1.1.2.1. On pose $V'(G.x) = \{x \in X \mid (f - h_{G.x} - h'_{G.x})(x) \neq 0\}$. C'est un ouvert fermé de X d'intersection vide avec $G.x$. Donc $V(G.x) = p^{-1}(p(V'(G.x)))$, où $p : X \to X/G$ est la projection, est un sous-ensemble saturé strict de X qui est ouvert et fermé. Ainsi $U(G.x) = U - V(G.x)$ est un ouvert fermé saturé non-vide. On a un recouvrement de X par $U(G.x)$, et comme le support de f est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $U(G.x)_i$ pour $i \in I$ du support de f. comme dans la preuve du Théorème 1.1.2.1, on tire de celui-ci un raffinement $(U'_j)_{j \in J}$ pour un ensemble fini J où les U'_j sont des ouverts fermés saturés deux-à-deux disjoints. On construit une fonction par morceaux sur chacun de ces ouverts fermés une fonction égale à f et dans $C_c^\infty(U'_j)(G)$. On en déduit donc que $f \in C_c^\infty(X)(G)$. □

Corollaire 1.1.2.7. *On suppose que l'action de G sur X est constructible. Soit U l'ouvert régulier pour cette action. On suppose que toutes les intégrales orbitales de f dans ${}^cU$ sont nulles. Alors l'intégrale de f converge sur toute orbite de U.*

Démonstration. Tout d'abord, toute orbite est localement fermée quand l'action constructible. Ensuite, par définition, U le plus grand ouvert sur lequel l'action est régulière. De plus, toute orbite de U est fermée de U. D'après la proposition précédente, il existe $h \in C_c^\infty(X)(G)$ tel que $f - h$ soit à support dans U. Donc la restriction de $f - h$ à $G.x$ est à support compact et l'intégrale de f sur $G.x$ converge. □

Sur la désintégration des mesures. Soit F un corps local non-archimédien. On reprend la définition de [HC70, V.2] qui est plus restrictive que celle de [Ser92, Part II

Chap. III].

Définition 1.1.2.8. On appelle variété analytique de dimension n un espace topologique séparé M muni d'une famille d'applications Φ qui satisfait :

1. tout $\phi \in \Phi$ est un homéomorphisme d'un ouvert U_ϕ de M dans un ouvert $V_\phi = \phi(U_\phi)$ de F^n ;
2. si $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$, l'homéomorphisme induit de $\phi_1(U_{\phi_1} \cap U_{\phi_2})$) dans $\phi_2(U_{\phi_1} \cap U_{\phi_2})$) par $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est analytique ;
3. $(U_\phi)_{\phi\in\Phi}$ est un recouvrement de M ;
4. la famille Φ est maximale par rapport aux trois propriétés précédentes.

Ceci est la définition « naïve » des variétés analytiques, on peut définir les objets de la géométrie classique de cette manière : d'après [Ser92, Part II Chap. III], on peut parler de fibré tangent, cotangent, de formes différentielles, etc. Le dernier point de la définition précédente nous dit simplement que l'atlas définit par la famille Φ est maximal, les éléments de cette famille représentant les cartes sur notre variété. On dira qu'une application entre espaces analytiques est analytique si, lue dans les cartes, cette application est analytique. On définit sans difficulté la différentielle d'une application analytique.

Définition 1.1.2.9. Une application analytique $\alpha : X \to Y$ est une submersion en $x \in X$ si sa différentielle $d\alpha_x$ est surjective *i.e.* de même rang que la dimension de Y. Une application analytique qui est une submersion en tout x de X est simplement appelée une submersion.

Proposition 1.1.2.10 ([Ser92, III.10])**.** *Une application analytique $\alpha : X \to Y$ est une submersion en $x \in X$ si et seulement s'il existe des voisinages ouverts U de x dans X, V de $\alpha(x)$ dans Y et W de 0 dans $F^{\dim(X)-\dim(Y)}$, et un isomorphisme de variétés analytiques $\psi : U \to V \times W$ tel que $\alpha(U) = V$ et le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] & V \\ V \times W \arrow[ur, "p_V"'] & \end{tikzcd}$$

où $p_V : V \times W \to V$ désigne la projection sur V.

Définition 1.1.2.11. Soit R un anneau de sorte que la caractéristique résiduelle de F soit inversible dans R. On dit qu'une forme linéaire $\mu : C_c^\infty(X) \to R$ est une mesure sur X si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et une carte $\phi : U \to \phi(U)$ tels que la forme linéaire définie par $f \in C_c^\infty(\phi(U)) \mapsto \mu(f \circ \phi^{-1}) \in R$ soit égale à $c\ \mu_{F^{\dim(X)}}|_{\phi(U)}$ avec $c \in R$, *i.e.* un multiple de la restriction de la mesure de Haar de $F^{\dim(X)}$ à l'ouvert $\phi(U)$.

On dit qu'une mesure est partout non-nulle si son support est égal à X. De manière équivalent cela revient à demander que pour tout $x \in X$, le c dans la définition précédente n'est jamais nul. On dit qu'une mesure est partout inversible si pour tout $x \in X$, on a $c \in R^\times$ dans la définition précédente. Bien évidemment, ces deux définitions coïncident quand R est un corps.

Proposition 1.1.2.12. *Soit R un anneau de sorte que la caractéristique résiduelle de F soit inversible dans R. Soit $\alpha : X \to Y$ une submersion de variétés analytiques sur F. Soient μ_X et μ_Y deux mesure partout inversibles sur X et Y.*

Soit $f \in C_c^\infty(X)$. Alors il existe une unique fonction $M_f \in C_c^\infty(Y)$ telle que pour tout $F \in C_c^\infty(Y)$, on ait :

$$\mu_X(f \times (F \circ \alpha)) = \mu_Y(M_f \times F).$$

L'application ainsi définie $M : f \mapsto M_f$ est un morphisme surjectif de R-modules tel que, pour tout $f \in C_c^\infty(X)$, on a $supp(M_f) \subset \alpha(supp(f))$. Et en particulier $\mu_X = \mu_Y \circ M$.

Démonstration. La preuve est la même que [HC70, V.2], qui elle-même se base sur la preuve dans le cas des variétés analytiques réelles [HC64]. Soit $f \in C_c^\infty(X)$. Déjà, l'unicité vient du fait que μ_Y est partout non-nulle. En effet, pour tout $H \in C_c^\infty(Y)$, la distribution $F \mapsto \mu_Y(HF)$ est une mesure. Elle est nulle si et seulement H est la fonction nulle. Ensuite, il s'agit de construire une telle fonction M_f qui satisfait à l'égalité voulue. Pour ce faire, il suffit de prouver ce résultat localement. Recoller ces mesures selon les différentes cartes ne pose pas de problème ici car la topologie localement profini permet de s'abstraire des conditions de recollement en considérant des recouvrements composés d'ouverts-fermés disjoints.

On sait que localement, *i.e.* pour des systèmes de coordonnées au voisinage de $x \in X$ et $\alpha(x) \in Y$ où $n = \dim(X)$ et $m = \dim(Y)$, l'application α lue dans les cartes est de la projection sur les premières coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}_F^n \mapsto (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{O}_F^m$. Le problème local est donc le suivant. Soit $m \leq n$. On pose $X = \mathcal{O}_F^n$ et $Y = \mathcal{O}_F^m$. Comme les mesures sont partout inversibles par hypothèse, on peut se ramener à $\mu_X = \mu_{F^n}|_X$ et $\mu_Y = \mu_{F^m}|_Y$. On note p la projection sur les m premières coordonnées. On décompose la mesure μ_{F^n} en $\mu_{F^m} \times \mu_{F^{n-m}}$. Soit $f \in C_c^\infty(X)$. On pose :

$$M_f : (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \int_{F^{n-m}} f(x_1, \ldots, x_n) d\mu_{F^{n-m}}((x_{m+1}, \ldots, x_n)).$$

Alors $M_f \in C_c^\infty(Y)$ et $\mathrm{supp}(M_f) \subset p(\mathrm{supp}(f))$. L'application $M : f \in C_c^\infty(X) \mapsto M_f \in C_c^\infty(Y)$ ainsi définie est un morphisme de R-modules qui vérifie, pour tout $F \in C_c^\infty(Y)$:

$$\mu_{F^n}(f \times (F \circ p)) = \mu_{F^m}(M_f \times F).$$

De plus, elle est surjective car il existe $\gamma \in C_c^\infty(\mathcal{O}_F^{n-m})$ telle que $\int_{F^{n-m}} \gamma(x_{m+1}, \ldots, x_n) d\mu_{F^{n-m}} = 1$. En effet, si un tel γ existe, alors pour tout $F \in C_c^\infty(Y)$, on a $F \times \gamma \in C_c^\infty(X)$ et $M_{F\times\gamma} = F$. L'existence d'un tel γ est assurée par l'hypothèse sur R, à savoir que la caractéristique résiduelle de F est inversible dans R. Dans le cas général, on procède ensuite comme dans [HC64, 3] pour recoller selon les différentes cartes qui recouvrent X et Y. □

Il existe toute une variété de submersions que l'on peut construire. On reprend ici les définitions de [BZ76, Append.]. Si $\alpha : X \to Y$ est un F-morphisme corégulier – *i.e.* $(d\alpha)_x$ est surjective pour tout $x \in X$ – de variétés algébriques lisses définies sur F, alors α induit une submersion de variétés analytiques $\alpha_F : X(F) \to Y(F)$. On peut alors appliquer la proposition sur la désintégration des mesures. Donnons-en un exemple :

Corollaire 1.1.2.13. *Soit G un groupe algébrique linéaire défini sur F. Soit H un sous-groupe fermé de G. On pose $X = G(F)$ et $Y = H(F)\backslash G(F)$. Soit R un anneau de sorte que la caractéristique résiduelle de F soit inversible dans R. Alors pour toutes mesures partout inversibles μ_X de X et μ_Y de Y, il existe un morphisme surjectif de R-modules $M : f \in C_c^\infty(X) \to C_c^\infty(Y)$ tel que :*

$$\mu_X = \mu_Y \circ M.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que le morphisme $\alpha : G \to H\backslash G$ induit une submersion de variétés analytiques $\alpha_F : G(F) \to (H\backslash G)(F)$. Tout d'abord, G et $H\backslash G$ sont des variétés algébriques lisses dont toutes les composantes irréductibles ont même dimension (voir [Bor91, Prop. 6.7 & Th. 6.8]). Enfin, le morphisme $G \to H\backslash G$ induit une submersion de variétés analytiques $\alpha_F : G(F)\backslash(H\backslash G)(F)$ (voir la preuve du [BZ76, Lem. A.3]). L'image de cette submersion est $H(F)\backslash G(F)$ qui est un ouvert de $(H\backslash G)(F)$ d'après [PR94, Th. 6.14] et [Kot05, §3.2]. On applique alors la Proposition 1.1.2.12 pour la submersion $\alpha_F : G(F) \to H(F)\backslash G(F)$. □

Mesure quotient et désintégration. On éclaire ce corollaire à l'aide de la mesure de Haar quotient pour donner explicitement un tel M_f. Dans ce cas très particulier, cela fonctionne pour des groupes localement profinis plus généralement. Soit G un groupe localement profini et H un sous-groupe fermé. D'après la Proposition de [Ser97, I.1.2], il existe une section de la restriction de $p : G \to H\backslash G$ à tout sous-groupe compact ouvert K de G. Par suite, on peut construire une section de p de la manière suivante. Soit s_K une section de $p|_K$ et soit $\{x_{HgK}\}$ un système de représentants dans G des doubles classes HgK. On pose $K_g = x_{HgK}Kx_{HgK}^{-1}$ et on fixe une section s_{K_g} de $p|_{K_g}$. Alors l'application :

$$g \in G \mapsto s_{K_g}(Hgx_{HgK}^{-1})x_{HgK} \in G.$$

est continue et constante sur les classes à droite modulo H. Elle induit une application continue $s : H\backslash G \to G$ qui est une section de p.

Soit χ un caractère lisse de H à valeurs dans R. Grâce à l'existence d'une section s de p, on peut définir explicitement un isomorphisme de R-modules entre $C_c^\infty(H\backslash G, \chi)$ et $C_c^\infty(H\backslash G)$. En effet, on associe à $f \in C_c^\infty(H\backslash G, \chi)$ la fonction $g \mapsto \chi(s(Hg)g^{-1})f(g)$. On vérifie facilement qu'elle est constante sur les classes à droite modulo H. Elle induit alors une fonction $\varphi_f \in C_c^\infty(H\backslash G)$. L'inverse de $f \mapsto \varphi_f$ est donné par $F \mapsto (g \mapsto \chi(s(Hg)^{-1}g)F(Hg))$. On reprend les notations de la Proposition 1.1.1.8 pour $\mu_{H\backslash G}$ et p_H. On prouve sans difficulté le fait suivant :

Proposition 1.1.2.14. *On suppose qu'il existe un sous-groupe compact ouvert de G de pro-ordre inversible dans R. On pose $\chi = \delta_H \ \delta_G|_H^{-1}$. Soit $\varphi : C_c^\infty(H\backslash G, \chi) \to C_c^\infty(H\backslash G)$ l'isomorphisme de R-modules que l'on vient de décrire. On définit une distribution μ' : $C_c^\infty(H\backslash G) \to R$ en posant $\mu' = \mu_{H\backslash G} \circ \varphi^{-1}$. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} C_c^\infty(G) \arrow[r, "p_H"] & C_c^\infty(H\backslash G, \chi) \arrow[r, "\mu_{H\backslash G}"] \arrow[d, "\varphi"'] & R . \\ & C_c^\infty(H\backslash G) \arrow[ur, "\mu'"'] & \end{tikzcd}$$

Il existe donc un morphisme surjectif de R-modules défini par :

$$M : f \in C_c^\infty(G) \mapsto \varphi \circ p_H(f) \in C_c^\infty(H\backslash G)$$

tel qu'on ait $\mu_G = \mu' \circ M$.

1.1.3 Représentations lisses modulaires des groupes localement profinis

Soient G un groupe localement profini et R un anneau commutatif. Il existe un foncteur appelé *partie lisse* [Vig96, I.4.1] qui à tout $R[G]$-module V associe le plus grand $R[G]$-module lisse contenu dans V, que l'on note V^∞. Ce foncteur covariant est exact à gauche, mais pas à droite. Soit H un sous-groupe fermé de G.

Induction-restriction et contragrédiente.

Définition 1.1.3.1.

1. *L'induction non-normalisée de H à G* est un foncteur noté $\natural - \mathrm{Ind}_H^G$, qui à tout $R[H]$-module lisse $(\sigma, V) \in \mathrm{Rep}_R(H)$ associe $\natural - \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$, la partie lisse du $R[G]$-module $\{f : G \to V \mid f(hg) = \sigma(h)f(g), \forall g \in G, h \in H\}$ muni de l'action de G induite par la translation à droite de G sur lui-même.
2. *L'induction compacte non-normalisée de H à G* est un foncteur noté $\natural - \mathrm{ind}_H^G$, qui associe à tout $R[H]$-module lisse le sous-$R[G]$-module lisse $\natural - \mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ de $\natural - \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ constitué des fonctions à support compact modulo H.
3. *La restriction de G à H* est le foncteur d'oubli, noté Res_G^H, qui associe à tout $R[G]$-module lisse $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_R(G)$ le $R[H]$-module lisse $\mathrm{Res}_G^H(\pi) = V$ sous-jacent.
4. *La contragrédiente $(\pi^\vee, V^\vee)$ de $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_R(G)$* est la partie lisse du dual $V^* = \mathrm{Hom}_R(V, R)$ qui hérite de l'action de G : si $v^* \in V^*$, $\pi^*(g)\ v^* = v^* \circ \pi(g^{-1})$.

D'après [Vig96, I.4.18], le foncteur contragrédient $V \mapsto V^\vee$ est exact à condition que R soit un corps et qu'il existe un sous-groupe ouvert compact de G de pro-ordre inversible dans R. Dans ces conditions, la contragrédiente d'une représentation non-nulle est non-nulle. En général, ces faits ne sont pas garantis [Vig96, I.4.12].

On a la propriété classique dite de *réciprocité de Frobenius* :

Proposition 1.1.3.2. *L'induction $\natural - \mathrm{Ind}_H^G$ est l'adjoint à droite du foncteur Res_G^H.*

Soient (π, V) dans $\mathrm{Rep}_R(G)$ et K un sous-groupe fermé de G. On construit deux représentations du normalisateur de K dans G. Le première est l'ensemble des vecteurs K-invariants définis par $V^K = \{v \in V \mid \pi(k)v = v\}$. La deuxième est donnée par les coinvariants vis-à-vis de K, que l'on appelle *K-coinvariants*, définis comme $V_K = V/V[K]$ où $V[K] =< \pi(k)v - v \mid k \in K, v \in V\}$. C'est le plus grand quotient de V sur lequel l'action de K est triviale. Dans le cas où $K = G$, le foncteur des G-coinvariants possède un adjoint à droite qui est l'extension triviale $\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Rep}_R(G)$, où Mod_R est simplement la catégorie des R-modules.

Proposition 1.1.3.3. *On suppose maintenant qu'il existe un sous-groupe ouvert compact de pro-ordre inversible dans R. On pose $\chi = \delta_G^{-1}\delta_H$ vu comme un caractère de H. Alors pour tout $(\sigma, W) \in \mathrm{Rep}_R(G)$, on a :*

$$(\natural - \mathrm{ind}_H^G(\sigma))^\vee \simeq \natural - \mathrm{Ind}_H^G(\chi\ \sigma^\vee).$$

Définition 1.1.3.4. S'il existe un caractère $\chi^{\frac{1}{2}}$ à valeurs dans $R^\times$ de carré $\chi = \delta_G^{-1}\delta_H$, on définit les *induites normalisées* comme $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = \natural - \mathrm{Ind}_H^G(\chi^{\frac{1}{2}}\sigma)$ et $\mathrm{ind}_H^G(\sigma) = \natural - \mathrm{ind}_H^G(\chi^{\frac{1}{2}}\sigma)$.

Ainsi, en reprenant les hypothèses de la proposition, on a $(\mathrm{ind}_H^G(\sigma))^\vee \simeq \mathrm{Ind}_H^G(\sigma^\vee)$. Cette définition dépend bien évidemment du caractère $\chi^{\frac{1}{2}}$ choisi. Mais quand G est un groupe réductif p-adique, fixer un tel caractère revient à se donner d'une racine carrée de q dans R.

Admissibilité. On dit que $V \in \mathrm{Rep}_R(G)$ est *admissible* si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, le R-module V^K est de type fini.

Lemme 1.1.3.5. *Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe localement profini G. Soit σ une représentation lisse de H. Les points suivants sont équivalents :*
- $\natural - \mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = \natural - \mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ *;*
- *une des induites est admissible ;*
- $H\backslash G/K$ *est fini pour tout sous-groupe compact ouvert K ;*
- $H\backslash G/K$ *est fini pour un sous-groupe compact ouvert K.*

Démonstration. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. On a :

$$(\natural - \mathrm{ind}_H^G(\sigma))^K = \bigoplus_{HgK} R \quad \text{et} \quad (\natural - \mathrm{Ind}_H^G(\sigma))^K = \prod_{HgK} R.$$

On a égalité entre ce produit et cette somme directe si et seulement si le nombre de doubles classes HgK est fini. Les autres équivalences sont élémentaires. □

Proposition 1.1.3.6 (Lemme de Schur)**.** *Soit R un corps. Soit σ une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G)$. On fixe une clôture algébrique $\bar{R}$ de R et on suppose que la représentation $\sigma_{\bar{R}}$ obtenue par extension des scalaires est encore irréductible. On a alors :*

$$\mathrm{End}_{R[G]}(\sigma) = R.$$

Démonstration. Comme σ est irréductible, $\mathrm{End}_{R[G]}(\sigma)$ est un corps. En effet, soit $f \in \mathrm{End}_{R[G]}(\sigma)$. Le noyau et l'image de f sont des sous-représentations de σ, donc f est soit nulle, soit inversible. De plus $\mathrm{End}_{R[G]}(\sigma)$ aussi un R-espace vectoriel. L'application linéaire évidente $\mathrm{End}_{R[G]}(\sigma) \otimes_R \bar{R} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\bar{R}[G]}(\sigma)$ est injective. Par [Vig96, I.6.9], on a $\mathrm{End}_{\bar{R}[G]}(\sigma) = \bar{R}$. Donc par un argument de dimension, $\mathrm{End}_{R[G]}(\sigma)$ est un R-espace vectoriel de dimension 1. □

Groupe de Grothendieck. On définit le groupe de Grothendieck comme le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles admissibles de G. Pour une représentation π dans $\mathrm{Rep}_R(G)$, on note $[\pi]_{\mathrm{ss}}$ la classe de sa semi-simplifiée dans le groupe de Grothendieck. On rappelle que la semi-simplifiée d'une représentation de longueur finie est simplement la somme de ses sous-quotients simples.

Caractère trace. Juste pour ce paragraphe, R est simplement un anneau. On suppose qu'il existe un sous-groupe compact ouvert de G de pro-ordre inversible dans R. Soit μ une mesure de Haar sur G. Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. Pour tout $f \in \mathcal{H}(G, K)$, on note $\mathrm{tr}(\pi^K(f))$ la trace de l'endomorphisme de V^K défini par $v \mapsto \int_G f(g)\pi(g)v \, d\mu(g)$. Par hypothèse, comme π est admissible, cette quantité est bien définie. On considère également $\mathrm{tr}\ \pi^K$ comme une forme linéaire sur $\mathcal{H}(G, K)$. Inversement, si $f \in \mathcal{H}(G)$, il existe un ouvert compact K tel que $f \in \mathcal{H}(G, K)$. La quantité $\mathrm{tr}(\pi^K(f))$ ne dépend pas du choix d'un tel K, on la note $\mathrm{tr}(\pi(f)))$. La forme linéaire $\mathrm{tr}\ \pi$ est alors bien définie sur $\mathcal{H}(G)$ comme $f \mapsto \mathrm{tr}(\pi(f))$. Elle dépend bien évidemment de μ, mais par unicité de la mesure de Haar, tout autre choix de mesure donne une forme linéaire proportionnelle à la précédente. On l'appelle *caractère-trace* – ou tout simplement trace – de π. On déduit facilement des définitions que deux représentations lisses admissibles isomorphes ont même caractère-trace.

On suppose maintenant que R est un corps et on note ℓ sa caractéristique. On va donner une réciproque partielle à la dernière assertion du paragraphe précédent. Le corollaire [Bou12, A VIII.376] assure que pour les représentations (lisses) semi-simples de dimension finie sur R, le caractère-trace est discrimant à multiplicité ℓ près. En se ramenant aux vecteurs fixes sous un sous-groupe ouvert compact, on peut énoncer le même résultat pour les représentations lisses admissibles semi-simples. C'est en particulier vrai dans le cas irréductible :

Théorème 1.1.3.7. *Deux représentations lisses irréductibles admissibles sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère-trace.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour les tr π^K pour tout sous-groupe compact ouvert K. Et ceci est vrai en vertu du corollaire [Bou12, A VIII.376] car π^K est irréductible et de dimension finie. □

On peut alors démontrer un énoncé qui sera à la base de la construction de l'involution MVW dans la Section 2.5. Pour tout automorphisme ou anti-automorphisme bicontinu σ de G et toute représentation lisse π, on pose $\pi^\sigma(g) = \pi(\sigma(g))$. Cette opération préserve bien évidemment la lissité, l'admissibilité, la semi-simplicité et l'irréductibilité.

Théorème 1.1.3.8. *Soit R un corps. Soit G un groupe localement profini contenant un sous-groupe ouvert de pro-ordre inversible dans R et qu'on suppose unimodulaire. Soit $\sigma : G \to G$ un homéomorphisme qui est un automorphisme ou un anti-automorphisme de groupes. On suppose que :*

1. *l'action par conjugaison de G sur lui-même, notée γ, est constructible ;*
2. *pour tout $g \in G$, il existe $g^\sigma \in G$ tel que $\gamma(g) \circ \sigma = \sigma \circ \gamma(g^\sigma)$;*
3. *σ conserve chaque classe de conjugaison ;*
4. *il existe un entier n et un élément $g_0 \in G$ tel que $\sigma^n = \gamma(g_0)$.*

Alors, pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}_R(G)$ admissible, on a $\pi^\sigma \simeq \pi$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathrm{tr}_{\pi^\sigma} = \mathrm{tr}_\pi$. On va montrer que la distribution tr_π est σ-invariante, ce qui impliquera le résultat. En effet, les distributions tr_{π^σ} et $(\mathrm{tr}_\pi)^\sigma$ sont égales car, d'après l'hypothèse 4 et le fait que G soit unimodulaire, le module de σ vaut 1. Enfin, on applique le Corollaire 1.1.2.2 pour montrer que tr_π est σ-invariante. On a bien pour toute orbite $G.x$ que $\sigma.\mu_{G.x} = \mu_{G.x}$ car σ est de module 1, et s'il existe une distribution G-invariante non nulle sur $C_c^\infty(G.x)$, alors elle provient de la mesure de Haar sur G d'après la preuve du Lemme 1.1.2.3. □

1.1.4 Filtration provenant d'une stratification

Proposition 1.1.4.1. *Soit X un espace localement profini muni d'une action d'un groupe localement profini G. On suppose que l'action de G sur X a un nombre fini d'orbites, indicées par une réunion croissante ouverte $X = \sqcup_{0 \leq i \leq r} X_i$ i.e. pour tout $0 \leq k \leq r$, l'ensemble $Y_k = \sqcup_{0 \leq i \leq k} X_i$ est ouvert. On considère le $R[G]$-module lisse $C_c^\infty(X, R)$ muni de l'action de G héritée de celle sur X. Alors on a une filtration :*

$$0 = R^{-1} \subset R^0 \subset R^1 \cdots \subset R^r = C_c^\infty(X)$$

où $R^k = C_c^\infty(Y_k)$. *Pour* $0 \leq k \leq r$, *soit* x_k *un élément de l'orbite* X_k *et* St_{x_k} *le stabilisateur de* x_k *dans* G. *Les quotients successifs de la filtration sont alors :*

$$J_k = R^k/R^{k-1} \simeq \natural - \mathrm{Ind}_{\mathrm{St}_{x_k}}^G(1).$$

En particulier, la classe d'isomorphisme des ces quotients ne dépend pas du choix de x_k.

Démonstration. Le fait que l'on puisse ré-indicer la décomposition en orbites, en réunion croissante ouverte d'orbites, est un fait bien connu [BZ76, 1.5], [Ren09, II.3.3]. On a tout d'abord un isomorphisme de $R[G]$-modules lisses $C_c^\infty(Y_k)/C_c^\infty(Y_{k-1}) \simeq C_c^\infty(X_k)$ induit par $f \mapsto f|_{X_k}$. Et comme l'application $g \in G \mapsto g^{-1}.x_k \in X_k$ induit un homéomorphisme [Ren09, II.3.3] entre $\mathrm{St}_{x_k}\backslash G$ et X_k (muni de la topologie induite par celle de X), on en déduit que $C_c^\infty(X_k) = C_c^\infty(\mathrm{St}_{x_k}\backslash G) \simeq \natural - \mathrm{ind}_{\mathrm{St}_{x_k}}^G(1)$. □

1.1.5 Rappels sur le lemme géométrique

Le théorème que l'on présente est adapté de [BZ77, 5.]. On utilise [Vig96] pour donner le cadre minimal qui est nécessaire. Soient G un groupe localement profini et U un sous-groupe fermé de G limite de ses sous-groupes compacts ouverts [Vig96, I.4.10]. On suppose que R est un corps tel que G contient un sous-groupe compact ouvert de pro-ordre inversible dans R, et le pro-ordre de U est inversible dans R. Le module δ_U de U est donc bien défini d'après le Corollaire 1.1.1.5. On suppose enfin qu'il existe un caractère $\delta_U^{\frac{1}{2}}$ à valeurs dans R de carré δ_U. Soit M un sous-groupe fermé du normalisateur de U dans G tel que $M \cap U = \{e\}$. Le produit semi-direct $P = MU$ est un sous-groupe ferméde G. On voit δ_U comme un caractère de M via l'action naturelle de M sur U. On définit le foncteur $i_P^G : \mathrm{Rep}_R(M) \to \mathrm{Rep}_R(G)$ obtenu en tensorisant d'abord par le caractère $\delta_U^{\frac{1}{2}}$, puis en étendant trivialement l'action de U via $M \simeq P/U$, et en composant avec l'induite compacte non-normalisée :

$$i_P^G(\rho) = \natural - \mathrm{ind}_P^G(\delta_U^{\frac{1}{2}}\rho).$$

On définit ensuite le foncteur $r_G^P : \mathrm{Rep}_R(G) \to \mathrm{Rep}_R(M)$ comme la composée du foncteur d'oubli $\mathrm{Rep}_R(G) \to \mathrm{Rep}_R(P)$, puis des U-coinvariants $\mathrm{Rep}_R(P) \to \mathrm{Rep}_R(M)$ normalisés par le caractère $\delta_U^{-\frac{1}{2}}$. Ce que l'on résume ainsi :

$$r_G^P(\pi) = \delta_U^{-\frac{1}{2}}[\pi]_U.$$

Le foncteur r_G^P est exact d'après [Vig96, I.4.10].

Énoncé général. Soient R, G, $P = MU$ et $Q = NV$ comme dans le paragraphe précédent. On dit qu'un sous-groupe H de G est *décomposable vis-à-vis de la paire* (M, U) si $H \cap MU = (H \cap M)(H \cap U)$. Et pour tout $w \in G$ on note $w(g) = wgw^{-1}$ la conjugaison par w. On énonce trois conditions :

1. le groupe G est dénombrable à l'infini ;
2. Q agit sur l'espace homogène $X = P\backslash G$ par $q.(Ph) = Phq^{-1}$ où $Ph \in X$ et $q \in Q$, et n'a qu'un nombre fini d'orbites, notées $Z_1, \ldots, Z_k$ et rangées telles que chacun des ensembles suivants soit ouvert dans X :

$$Y_1 = Z_1, \quad Y_2 = Z_1 \cup Z_2, \ldots, Y_k = Z_1 \cup \cdots \cup Z_k = X \ ;$$

3. pour tout $w \in G$, les groupes $w(P)$, $w(M)$ et $w(U)$ sont décomposables vis-à-vis de (N, V) ; les groupes $w^{-1}(Q)$, $w^{-1}(N)$ et $w^{-1}(V)$ sont décomposables vis-à-vis de (M, U).

Si tous ces points sont vérifiés, on définit un foncteur $\Phi_Z : \mathrm{Rep}_R(M) \to \mathrm{Rep}_R(N)$ où $Z = Pw^{-1}Q$ est la Q-orbite contenant Pw^{-1}. On le fait comme suit :

$$M' = M \cap w^{-1}(N),\ N' = w(M') = w(M) \cap N,$$

$$V' = M \cap w^{-1}(V),\ U' = N \cap w(U).$$

Ces éléments définissent des foncteurs :

$$r_M^{M'V'} : \mathrm{Rep}_R(M) \to \mathrm{Rep}_R(M'),\ w : \mathrm{Rep}_R(M') \to \mathrm{Rep}_R(N'),\ i_{N'U'}^N : \mathrm{Rep}_R(N') \to \mathrm{Rep}_R(N).$$

Soit ε_1 le caractère $\delta_U^{\frac{1}{2}}\delta_{U\cap w^{-1}(Q)}^{-\frac{1}{2}}$ de M', et ε_2 le caractère $\delta_V^{\frac{1}{2}}\delta_{V\cap w(P)}^{-\frac{1}{2}}$ de N'. Posons alors

$$\Phi_Z = i_{N'U'}^N \circ \varepsilon_2 \circ w \circ \varepsilon_1 \circ r_M^{M'V'} : \mathrm{Rep}_R(M) \to \mathrm{Rep}_R(N).$$

Théorème 1.1.5.1. *Supposons les conditions précédentes vérifiées. Alors le foncteur de restriction-induction $F = r_G^Q \circ i_P^G : Rep_R M \longrightarrow Rep_R N$ provient du recollement des foncteurs Φ_Z où Z parcourt l'ensemble des Q-orbites de X. Pour être plus précis, il existe $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = F$ une filtration tel que $F_i/F_{i-1} \simeq \Phi_{Z_i}$.*

La preuve de ce théorème [BZ77, 5.] utilise deux faits de manière cruciale. Tout d'abord, il faut assurer que l'intégration soit valable sur tout sous-groupe fermé de U et V, ainsi que sur tout quotient par des sous-groupes fermés. La Remarque 1.1.1.9 sur les mesures quotients assurent que l'hypothèse sur les pro-ordres de U et V est suffisante. De plus, il est nécessaire d'avoir l'exactitude de tous les foncteurs r_-^- qui interviennent, ce qui est assuré par [Vig96, I.4.10]. La preuve se généralise alors facilement, le lemme géométrique [Vig96, II.2.18] étant un cas particulier.

Cas particulier. Au vu des applications que l'on fait de ce théorème, cette construction se simplifie grandement. C'est pourquoi nous en donnons tout de suite une version simplifiée.

On suppose que V est trivial et $Q = N$. Le foncteur $r_M^{M'V'}$ est alors simplement la restriction de M à M'. De même, le foncteur F est le composé de l'induction i_P^G et de la restriction de G à N. Ensuite, on suppose que G (resp. N) est unimodulaire et que $\delta_U = \delta_P$ en tant que caractères de M (resp. $\delta_{U'} = \delta_{N'U'}$ sur N'). Enfin, remarquons que le stabilisateur de Pw^{-1} dans N est $N \cap w(P)$. Par hypothèse $w^{-1}(N)$ se décompose par rapport à (M, U), donc N se décompose par rapport à $(w(M), w(U))$, ce qui donne $N' = N \cap w(M)$ et $U' = N \cap w(U)$. Ce qui nous donne $\mathrm{Stab}_N(Pw^{-1}) = N'U'$. Finalement, si σ est une représentation lisse de M, $Pw_i^{-1} \in Z_i$ et St_i est son stabilisateur dans N :

$$\Phi_{Z_i}(\sigma) = i_{N_i'U_i'}^N(w_i \circ (\delta_U^{\frac{1}{2}}\delta_{U\cap w_i^{-1}(N)}^{-\frac{1}{2}}\sigma)|_{M'}).$$

Soit, puisque $U_i' = w_i(U \cap w_i^{-1}(N))$:

$$\Phi_{Z_i}(\sigma) = \natural - \mathrm{ind}_{\mathrm{St}_i}^N(w_i \circ (\delta_U^{\frac{1}{2}}\sigma)|_{M'}).$$

1.1.6 Décomposition d'une représentation d'un produit de groupes

Soient G_1, G_2 deux groupes localement profinis. D'après [Fla79], l'ensemble des représentations admissibles dans $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G_1 \times G_2)$ est en bijection avec l'ensemble des couples de représentations admissibles dans $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G_1) \times \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G_2)$. On suppose dans cette section que R est un corps algébriquement clos et qu'il existe un sous-groupe compact ouvert de $G_1 \times G_2$ de pro-ordre inversible dans R. On rappelle que cette dernière condition est équivalente grâce au Théorème 1.1.1.3 à l'existence d'une mesure de Haar sur $G_1 \times G_2$ à valeurs dans R. En particulier, il existe aussi des mesures de Haar sur G_1 et G_2.

Théorème 1.1.6.1 ([Vig01, Th. A.4])**.**

1. *Si π_i est une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G_i)$, $i = 1, 2$, alors $\pi_1 \otimes \pi_2$ est une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$.*
2. *Si π est une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$, alors il existe une représentation irréductible admissible π_i dans $\mathrm{Rep}_R(G_i)$, $i = 1, 2$, de sorte que $\pi \simeq \pi_1 \otimes \pi_2$. Les classes d'isomorphisme des π_i sont déterminées par celle de π.*

Démonstration. La preuve succincte de [Vig01, Th. A.4] affirme que l'on peut généraliser les arguments de [Fla79]. Dans le souci de rendre cette preuve plus explicite, on se propose ici d'en reprendre pas à pas toutes les étapes. Les propriétés suivantes sont relativement immédiates :
— $\mathcal{H}_R(G_1 \times G_2) \simeq \mathcal{H}_R(G_1) \otimes \mathcal{H}_R(G_2)$;
— $\mathcal{H}_R(G_1 \times G_2, K_1 \times K_2) \simeq \mathcal{H}_R(G_1, K_1) \otimes \mathcal{H}_R(G_2, K_2)$;
— $(W_1 \otimes W_2)^{K_1 \times K_2} \simeq W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2}$.
pour tout $W_i \in \mathrm{Rep}_R(G_i)$ et tout sous-groupe compact ouvert K_i de G_i de pro-ordre inversible dans R, où $i = 1, 2$. La première assertion du théorème résulte du troisième point et du lemme classique :

Lemme 1.1.6.2. *Soit G un groupe localement profini qui admet un sous-groupe ouvert compact de pro-ordre inversible dans R. Alors un $R[G]$-module lisse W est irréductible si et seulement si, pour tout sous-groupe compact ouvert K de pro-ordre inversible dans R, le $\mathcal{H}_R(G, K)$-module W^K est irréductible.*

Pour le deuxième point du théorème réciproquement, soit W une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$. Soit $K = K_1 \times K_2$, où K_i est un sous-groupe compact ouvert de G_i de pro-ordre inversible dans R et tel que $W^K \neq 0$. L'espace W^K est de dimension finie, donc on peut appliquer les résultats de [Bou12, A VIII.208] : il existe un couple de $\mathcal{H}_R(G_i, K_i)$-modules $W_i^{K_i}$ et un isomorphisme a_K de $\mathcal{H}_R(G_1 \times G_2, K)$-modules tels que W^K soit isomorphe à $W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2}$. De même pour tout sous-groupe ouvert $K' = K_1' \times K_2'$ inclus dans K, on peut construire un isomorphisme $a_{K'}$. Il existe alors un couple de morphismes de $\mathcal{H}_R(G_i, K_i)$-modules $b_i = b_i(K, K') : W_i^{K_i} \to W_i^{K_i'}$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} W^K \arrow[r, "a_K"] \arrow[d] & W_1^{K_1} \otimes W_2^{K_2} \arrow[d, "b_1 \otimes b_2"] \\ W^{K'} \arrow[r, "a_{K'}"] & W_1^{K_1'} \otimes W_2^{K_2'} \end{tikzcd}$$

De plus, les morphismes $b_i(K, K')$ peuvent être choisis de sorte que les sous-groupes compacts ouverts précédents K, K' forment un système inductif. Alors :

$$W \simeq W_1 \otimes W_2, \text{ où } W_i = \varinjlim_{K_i} W_i^{K_i},$$

et W_i est une représentation irréductible admissible dans $\mathrm{Rep}_R(G_i)$. La classe de W_i est déterminée par celle de W, car la restriction de W à G_i est W_i-isotypique. □

Les deux lemmes suivants généralisent [MVW87, Chap. 2, Lem. III.3 & Lem. III.4]. Les modifications apportées aux preuves sont mineures, mais on les reprend en détail pour insister sur ces légers changements.

Lemme 1.1.6.3. *Soient* (π_1, V_1) *une représentation irréductible admissible dans* $\mathrm{Rep}_R(G_1)$ *et* (π_2, V_2) *une représentation dans* $\mathrm{Rep}_R(G_2)$. *Alors, pour toute sous-représentation* V *de* $V_1 \otimes V_2$, *il existe une sous-représentation* V_2' *de* V_2 *telle que* $V = V_1 \otimes V_2'$ *dans* $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$.

Démonstration. Posons $V_2' = \{v_2 \in V_2, \forall v_1 \in V_1, v_1 \otimes v_2 \in V\}$. Cet espace est invariant par G_2, et $V_1 \otimes V_2'$ est une sous-représentation de V. Quotientions par $V_1 \otimes V_2'$. On est ramené au cas où $V_2' = \{0\}$, et on veut montrer qu'alors $V = \{0\}$. Si $V \neq \{0\}$, soit $v \in V$ non-nul. On peut écrire :

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_1^i \otimes v_2^i$$

avec des vecteurs v_1^i linéairement indépendants, et $v_2^i \neq 0$ pour tout i. Soit K_1 un sous-groupe compact ouvert de pro-ordre inversible dans R stabilisant chaque v_1^i. Il en existe toujours un, puisque, $\cap_i \mathrm{Stab}_{G_1}(v_1^i)$ est un sous-groupe ouvert comme intersection finie de sous-groupes ouverts et il existe un sous-groupe compact ouvert de pro-ordre inversible dans G_1. Les éléments v_1^i appartiennent donc tous à $V_1^{K_1}$. La représentation sur $V_1^{K_1}$ déduite de π_1 est irréductible *i.e.* $V_1^{K_1}$ est un $\mathcal{H}_R(G_1, K_1)$-module simple. De plus, π_1 est admissible. Par le théorème de Burnside, on déduit que l'application $\pi_1 : \mathcal{H}_R(G_1, K_1) \to \mathrm{End}_R V_1^K$ est surjective. Il existe donc $f \in \mathcal{H}_R(G_1, K_1)$ telle que :

$$\pi_1(f) v_1^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ v_1^1 & \text{si } i = 1 \end{cases}.$$

Si l'on choisit maintenant un sous-groupe compact ouvert de G_2 de pro-ordre inversible dans R stabilisant v_2^1, on a alors $v_1^1 \otimes v_2^1 = (\pi_1(f) \otimes \pi_2(e_{K_2}))(v) \in V$. Soit $v_1 \in V_1$ quelconque. Comme π_1 est irréductible, il existe un élément f' dans $\mathcal{H}_R(G_1)$ tel que que $\pi_1(f') v_1^1 = v_1$. On obtient alors que $v_1 \otimes v_2^1 = (\pi_1(f') \otimes \pi_2(e_{K_2}))(v_1^1 \otimes v_2^1) \in V$. D'où $v_2^1 \in V_2'$, contradiction. □

Lemme 1.1.6.4. *Soient* $(\pi_1, V_1) \in \mathrm{Irr}_R(G_1)$ *admissible et* $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$. *On pose :*

$$V[\pi_1] = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1)} \mathrm{Ker}(f).$$

C'est une sous-représentation de V *et on dit que* $V_{\pi_1} = V/V[\pi_1]$ *est le plus grand quotient* π_1*-isotypique. Cela signifie que* V_{π_1} *est, à isomorphisme près, l'unique représentation* π_1*-isotypique dans* $\mathrm{Rep}_R(G_1)$ *qui soit à la fois un quotient de* V *et qui factorise toute flèche de* V *vers une représentation* π_1*-isotypique. De plus, il existe une représentation* (π_2, V_2) *dans* $\mathrm{Rep}_R(G_2)$, *unique à isomorphisme près, telle que la représentation* V_{π_1} *de* $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ *soit isomorphe à la représentation* $V_1 \otimes V_2 = \pi_1 \otimes \pi_2$.

Démonstration. On ne vérifie que la deuxième partie du lemme concernant l'action de G_2, la première ne posant pas de problème particulier. Quitte à quotienter, il suffit de prouver ce lemme dans le cas où V est une représentation qui vérifie $V[\pi_1] = \{0\}$. Pour tout $R[G_1]$-module U_1, on note $(U_1)_{G_1}$ le plus grand quotient de U_1 sur lequel G_1 agit trivialement. Soit $(\pi_1^\vee, V_1{}^\vee)$ la représentation contragrédiente de (π_1, V_1). Comme dans le cas complexe [Ren09, III.1.9.], π_1 irréductible admissible entraîne que l'on a $(V_1{}^\vee \otimes V_1)_{G_1} \simeq R$. Supposons d'abord que π_2 existe. Alors :

$$(V_1{}^\vee \otimes V)_{G_1} \simeq (V_1{}^\vee \otimes V_1 \otimes V_2)_{G_1} \simeq (V_1{}^\vee \otimes V_1)_{G_1} \otimes V_2 \simeq V_2.$$

D'où l'unicité de V_2. Réciproquement, posons $V_2' = (V_1{}^\vee \otimes V)_{G_1}$, soit $p : V_1{}^\vee \otimes V \to V_2'$ la projection naturelle. L'espace V_2' est naturellement muni d'une action lisse π_2' de G_2. On définit une application linéaire :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & V & \to & \mathrm{Hom}_R(V_1{}^\vee, V_2') \\ & v & \longmapsto & (\check{v_1} \mapsto p(\check{v_1} \otimes v)) \end{array}.$$

Cette application entrelace $\pi \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ avec l'action de $G_1 \times G_2$ sur $\mathrm{Hom}_R(V_1{}^\vee, V_2')$ déduite de $\pi_1{}^\vee$ et π_2'. Soient $v \in V$ et K un sous-groupe ouvert compact de G_1 de pro-ordre inversible dans R fixant v. Soit e_K l'idempotent associé dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G_1)$ de G_1. Pour $\check{v_1} \in V_1{}^\vee$, on a :

$$\phi(v)(\check{v_1}) = p(\check{v_1} \otimes v) = p(\check{v_1} \otimes \pi(e_K)v) = p(\pi_1{}^\vee(\check{e_K})\check{v_1} \otimes v_1)$$

où $\check{e_K}$ est l'image de e_K par l'automorphisme $g \mapsto g^{-1}$. Mais $\check{e_K} = e_K$, d'où $\phi(v)(\check{v_1}) = \phi(v)(\pi_1{}^\vee(\check{e_K})\check{v_1})$. Autrement dit $\phi(v)$ se factorise par $\pi_1{}^\vee(e_K)$. On a un plongement naturel $V_1 \otimes V_2' \to \mathrm{Hom}(V_1{}^\vee, V_2')$. L'admissibilité de π_1 implique que son image est le sous-espace des $f \in \mathrm{Hom}(V_1{}^\vee, V_2')$ tels qu'il existe un sous-groupe ouvert compact K de G_1 – de pro-ordre inversible – tel que f se factorise par $\pi_1{}^\vee(e_K)$. Alors ϕ se factorise par $\phi' : V \to V_1 \otimes V_2'$. Montrons que ϕ' est injective. Soit $v \in V$, $v \neq 0$. Il existe par hypothèse $f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V, V_1)$ tel que $f(v) \neq 0$. Fixons un tel f, et $\check{v_1}$ tel que $\check{v_1} \circ f(v) \neq 0$. Par fonctorialité, f définit une application :

$$f' : (V_1{}^\vee \otimes V)_{G_1} \to (V_1{}^\vee \otimes V_1)_{G_1} \simeq R.$$

On a $f' \circ p(\check{v_1} \otimes v) = \check{v_1} \circ f(v) \neq 0$. Donc $p(\check{v_1} \otimes v) \neq 0$ et $\phi(v) \neq 0$. Donc ϕ est injective et ϕ' l'est a fortiori. Alors V s'identifie à un sous-$G_1 \times G_2$-module de $V_1 \otimes V_2'$, et l'existence de (π_2, V_2) résulte du lemme précédent. □

Remarque 1.1.6.5. Bien entendu, la classe d'isomorphisme de π_1 définit sans ambiguïté une classe d'isomorphisme qu'on continue de noter V_{π_1}.

Remarque 1.1.6.6. Ceci est une remarque préparatoire pour la suite. Les deux lemmes précédents seront d'une importance capitale pour la construction de la représentation $\Theta(\pi_1)$, qui sera définie dans la section 4.5.3 comme le plus grand quotient π_1-isotypique de la représentation de Weil pour le produit de deux groupes $G_1 \times G_2$, où (G_1, G_2) forme une paire duale.

Un lemme utile sur la représentation régulière. On suppose que G est un groupe unimodulaire et qu'il existe un sous-groupe compact ouvert de G de pro-ordre inversible dans R. On plonge G diagonalement dans $G \times G$, et on note $\rho = \natural - \mathrm{ind}_G^{G \times G}(1) = C_c^\infty(G)$, munie de l'action par translation à droite et à gauche. On étend la preuve de [MVW87, Chap. 3, Lem. II.3].

Lemme 1.1.6.7. *Soit π une représentation irréductible admissible dans* $\mathrm{Rep}_R(G)$. *Alors le plus grand quotient π-isotypique de $\rho_g = \rho|_{G\times 1}$ est isomorphe à $\pi \otimes \pi^\vee$ en tant que $(G \times G)$-représentation. Autrement dit, si π_1 et π_2 sont des représentations irréductibles de G :*

$$\mathrm{Hom}_{G\times G}(\rho, \pi_1 \otimes \pi_2) \neq 0 \Leftrightarrow \pi_2 \simeq \pi_1^\vee.$$

Démonstration. Soit (π, V) une représentation irréductible admissible. Comme V est admissible, l'application :

$$(v, \check{v}) \in V \times V^\vee \mapsto (v' \mapsto \check{v}(v')v) \in \mathrm{End}_R(V)$$

induit un isomorphisme d'espace vectoriel entre $V \otimes V^\vee$ et les endomorphismes de V de rang fini. De même, l'image de tout élément de $\mathcal{H}_R(G, K)$ par π est de rang fini. En choisissant une mesure de Haar à gauche μ sur G, on obtient un $(G \times G)$-morphisme :

$$f \in C_c^\infty(G) \mapsto \pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)d\mu(g) \in V \otimes V^\vee.$$

Il est non-nul car, par hypothèse, il existe un sous-groupe compact ouvert de pro-ordre inversible. L'image de l'idempotent associé sera bien non-nulle. De plus, le Théorème 1.1.6.1 entraîne que la représentation $V \otimes V^\vee$ est irréductible. Donc $f \mapsto \pi(f)$ est surjectif.

Le noyau de ce morphisme est exactement $\cap_{A\in\mathrm{Hom}_G(\rho_g,\pi)}\mathrm{Ker}(A)$. En effet, si $\pi(f) = 0$, on a pour tout $\phi \in C_c^\infty(G)$ et tout $A \in \mathrm{Hom}_G(\rho_g, \pi)$:

$$A(\rho_g(f)\phi) = \pi(f)A(\phi) = 0.$$

Donc $\rho_g(f)\phi = f \star \phi$ est dans $\mathrm{Ker}(A)$. En prenant ϕ un idempotent d'un sous-groupe compact ouvert bien choisi – *i.e.* de pro-ordre inversible, on obtient que $f \in \mathrm{Ker}(A)$. Réciproquement, si $f \in \mathrm{Ker}(A)$ pour tout A dans $\mathrm{Hom}_G(\rho_g, \pi)$, alors pour tout $v \in V$, on définit $A_v : f \mapsto \pi(f)v$. Il est clair qu'on a $A_v \in \mathrm{Hom}_G(\rho_g, \pi)$. De plus, $A_v(f) = 0$ pour tout $v \in V$ entraîne que $\pi(f) = 0$. Le $(G \times G)$-morphisme $f \mapsto \pi(f)$ réalise donc la projection sur le plus grand quotient π-isotypique de $C_c^\infty(G)$. □

On désigne par 1_G la représentation triviale de G. Une mesure de Haar μ sur G à valeurs dans R est un opérateur d'entrelacement non nul dans $\mathrm{Hom}_G(C_c^\infty(G), 1_G)$. L'unicité de la mesure de Haar montre que l'on peut considérer de manière équivalente μ comme un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{G\times G}(C_c^\infty(G), 1_G \otimes \delta_G)$. Par analogie, on déduit de la preuve précédente un corollaire qui généralise en un certain sens l'unicité de la mesure de Haar.

Corollaire 1.1.6.8. *On reprend les mêmes hypothèses sauf que l'on ne suppose plus G unimodulaire. Alors le plus grand quotient π-isotypique de $\rho_g = \rho|_{G\times 1}$ est isomorphe à $\pi \otimes \delta_G\pi^\vee$ en tant que $(G\times G)$-représentation. En particulier, la dimension de* $\mathrm{Hom}_{G\times G}(\rho, \pi \otimes \delta_G\pi^\vee)$ *est* 1.

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme, à ceci près que l'image du $(G \times G)$-morphisme $f \mapsto \pi(f)$ est $\pi \otimes \delta_G\pi^\vee$. L'hypothèse sur la dimension provient du lemme de Schur 1.1.3.6 que l'on applique à $\pi \otimes \delta_G\pi^\vee$ qui est irréductible et admissible, R étant ici algébriquement clos par hypothèse. □

Produit tensoriel d'objets projectifs. Dans ce paragraphe seulement, R est un corps et il n'y a pas d'hypothèse sur les groupes localement profinis en jeu.

Définition 1.1.6.9. Soit G un groupe localement profini. Une représentation est dite *projective* si elle est un objet projectif de la catégorie $\mathrm{Rep}_R(G)$. On définit de même les représentations *injectives*.

Proposition 1.1.6.10. *Soient $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R(G_1)$ et $\pi_2 \in \mathrm{Rep}_R(G_2)$ deux représentations irréductibles projectives. Alors :*
(i) la représentation $\pi_1 \otimes \pi_2$ est un objet projectif dans la catégorie $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$;
(ii) la contragrédiente $(\pi_1 \otimes \pi_2)^\vee$ est injective dans $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$;
(iii) si π_1 et π_2 sont admissibles, la représentation $\pi_1^\vee \otimes \pi_2^\vee$ est injective.

Démonstration. En effet, il s'agit de prouver que le foncteur $\mathrm{Hom}_{G_1 \times G_2}(\pi_1 \otimes \pi_2, -)$ est exact. Ceci provient du fait que, si $V \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$, on a un isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{G_1 \times G_2}(\pi_1 \otimes \pi_2, V) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{G_2}(\pi_2, \mathrm{Hom}_{G_1}(\pi_1, V)) \\ f & \longmapsto & \Big(v_2 \mapsto (f_{v_2} : v_1 \mapsto f(v_1 \otimes v_2)) \Big) \end{array} .$$

Par hypothèse, les foncteurs $\mathrm{Hom}_{G_1}(\pi_1, -)$ et $\mathrm{Hom}_{G_2}(\pi_1, -)$ sont exacts, donc $\pi_1 \otimes \pi_2$ est projective. Ensuite, d'après [Vig96, I.4.13.] la contragrédiente d'une représentation projective est injective. Donc $(\pi_1 \otimes \pi_2)^\vee$ est injective. Et quand ces représentations sont admissibles, on a $(\pi_1 \otimes \pi_2)^\vee = \pi_1^\vee \otimes \pi_2^\vee$. □

Plus grand quotient π_1-isotypique ou π_1-coinvariants. On revient au cadre général de cette section, à savoir : R est un corps algébriquement clos et le groupe $G_1 \times G_2$ admet un sous-groupe compact ouvert de pro-ordre inversible dans R. On développe les propriétés du foncteur « plus grand quotient π_1-isotypique » pour donner des règles de calcul plus claires en fonction des caractéristiques de la représentation π_1.

Proposition 1.1.6.11. *Le foncteur $V \mapsto V_{\pi_1}$ de la catégorie $\mathrm{Rep}_R(G_1 \times G_2)$ dans elle-même est exact à droite. Si π_1 est un objet injectif, il respecte les injections et est donc exact.*

Démonstration. Il est clair que $V \mapsto V_{\pi_1}$ est un foncteur et qu'il respecte les surjections. Pour toute flèche $U \xrightarrow{f} V$, on note f_{π_1} l'image de f par ce foncteur. Il reste à montrer que pour toute suite exacte courte $0 \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \to 0$, on a $\ker(p_{\pi_1}) = \mathrm{Im}(i_{\pi_1})$. L'inclusion « $\supset$ » est évidente. Pour l'inclusion réciproque, on factorise d'abord p_{π_1} en $\widetilde{p_{\pi_1}}$: $V_{\pi_1}/\mathrm{Im}(i_{\pi_1}) \to W_{\pi_1}$. On va montrer que $\widetilde{p_{\pi_1}}$ admet une section s qui est un isomorphisme. En effet, le morphisme surjectif $V \to V_{\pi_1}/\mathrm{Im}(i_{\pi_1})$ se factorise par $V/\mathrm{Im}(\pi_1) \to V_{\pi_1}/\mathrm{Im}(i_{\pi_1})$ et donc induit une flèche $W \to V_{\pi_1}/\mathrm{Im}(i_{\pi_1})$. On applique le lemme 1.1.6.4 à V_{π_1} qui est donc une représentation de la forme $\pi_1 \otimes V_2$, et le lemme 1.1.6.3 entraîne que la sous-représentation $\mathrm{Im}(i_{\pi_1})$ est aussi de la forme $\pi_1 \otimes U_2$ avec $U_2 \subset V_2$. Le quotient $V_{\pi_1}/\mathrm{Im}(i_{\pi_1})$ est alors de la forme $\pi_1 \otimes V_2'$, qui est π_1-isotypique, et par définition du plus grand quotient π_1-isotypique il existe un unique morphisme $s : W_{\pi_1} \to V_{\pi_1}/\mathrm{Im}(i_{\pi_1})$ qui factorise le morphisme surjectif précédent $W \to V_{\pi_1}/\mathrm{Im}(i_{\pi_1})$. Par conséquent s est surjective. Enfin, on voit facilement en factorisant $p' : V \to W_{\pi_1}$ de différente manière que ceci implique que $p' = \widetilde{p_{\pi_1}} \circ s \circ p'$. Comme p' est surjectif, on en déduit que $\widetilde{p_{\pi_1}} \circ s = \mathrm{Id}_{W_{\pi_1}}$. Donc s est aussi injective.

Quand π_1 est un objet injectif, on a que $\phi \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V, \pi_1) \mapsto \phi \circ i \in \mathrm{Hom}_{G_1}(U, \pi_1)$ est surjectif. Alors $U_{\pi_1} \to V_{\pi_1}$ est bien injective car :

$$U[\pi_1] = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(U,\pi_1)} \ker(f) = \bigcap_{f \in \mathrm{Hom}_{G_1}(V,\pi_1)} \ker(f \circ i) = i^{-1}(V[\pi_1]) = \ker(U \to V_{\pi_1}).$$

□

Corollaire 1.1.6.12. *Le foncteur qui à V associe la classe d'isomorphisme de V_2, où $V_{\pi_1} = \pi_1 \otimes V_2$ dans $\mathrm{Rep}_R(G_2)$, est également exact à droite. Il est exact si π_1 est injective.*

Démonstration. Le produit tensoriel est pris au-dessus d'un corps R, π_1 est donc fidèlement plat dans la catégorie des R-espaces vectoriels. En particulier, les $G_1 \times G_2$-morphismes sont des applications R-linéaires. De plus, comme π_1 est irréductible et R algébriquement clos, on a un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{G_1,G_2}(\pi_1 \otimes V_2, \pi_1 \otimes V_2') = \mathrm{Hom}_{G_2}(V_2, V_2')$ via $f \mapsto \mathrm{Id}_{\pi_1} \otimes f$. Cela signifie que la suite exacte :

$$0 \to \pi_1 \otimes U_2 \to \pi_1 \otimes V_2 \to \pi_1 \otimes W_2 \to 0$$

induit une suite exacte de représentations de G_2 :

$$0 \to U_2 \to V_2 \to W_2 \to 0.$$

On termine en invoquant la Proposition 1.1.6.11. □

Remarque 1.1.6.13. D'après la Proposition 1.1.6.11, on peut aussi définir V_2 en se ramenant aux coinvariants pour G_1 c'est-à-dire $(\pi_1^\vee \otimes V)_{1_{G_1}}$.

Proposition 1.1.6.14. *Soient H_2 un sous-groupe fermé de G_2 et $V \in \mathrm{Rep}_R(G_1 \times H_2)$. On a alors :*

$$\natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V_{\pi_1}) = \natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V)_{\pi_1}.$$

Démonstration. Il suffit de le prouver dans le cas où $\pi_1 = 1_{G_1}$. En effet, les propriétés de finitude de l'induite compacte entraînent qu'elle commute au produit tensoriel au sens suivant :

$$\pi_1^\vee \otimes \natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V) = \natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(\pi_1^\vee \otimes V).$$

Et d'après la remarque précédente, démontrer le résultat pour 1_{G_1} suffit à le déduire pour tout π_1 car $(\pi_1^\vee \otimes V)_{1_{G_1}} = V_{\pi_1}$. Cela nous ramène donc à montrer que :

$$\natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V_{1_{G_1}}) = \natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V)_{1_{G_1}}.$$

Par exactitude du foncteur d'induction, cela revient à prouver que :

$$\natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V[1_{G_1}]) = \natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V)[1_{G_1}].$$

Dans le cas complexe, ce fait est prouvé dans [MVW87, Chap. 3, Lem. II.2] à l'aide de la théorie des faisceaux de [BZ76], qui est encore valable ici. On procède donc de même. Le membre de droite $M = \natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V)[1_{G_1}]$ est muni d'une structure de $C_c^\infty(H_2 \backslash G_2)$-module via $\varphi.f : g \mapsto \varphi(H_2 g) f(g)$. De plus, il est non dégénéré au sens où $C_c^\infty(H_2 \backslash G_2).M = M$. Par [BZ76, Prop. 1.14], il existe un faisceau $\mathcal{F}$ sur $H_2 \backslash G_2$, unique à isomorphisme près, tel que les sections à support compact de ce faisceau s'identifient à $\natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V)[1_{G_1}]$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est muni d'une action lisse – appelée « algébrique » dans [BZ76] – de G_2 sur ses sections à support compact, qui est simplement l'action héritée de celle sur $\natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V)[1_{G_1}]$. Enfin, [BZ76, Prop. 2.23] affirme que toute action lisse de G_2 sur les sections à support compact d'un faisceau sur $H_2\backslash G_2$ s'identifie à une induite à support compact $\natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(\rho)$, où ρ désigne l'action de H_2 sur la fibre en H_2. Il reste donc à prouver que $\rho = V[1_{G_1}]$. La restriction à H_2 induit une $G_1 \times H_2$-surjection :

$$f \in \natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V) \twoheadrightarrow f(1) \in V.$$

De plus, pour W une G_1-représentation, $W[1_{G_1}]$ s'identifie à $< g_1.w - w \mid g_1 \in G_1, w \in W >$. La restriction à H_2 induit donc une $G_1 \times H_2$-surjection $\natural - \mathrm{ind}_{H_2}^{G_2}(V)[1_{G_1}] \twoheadrightarrow V[1_{G_1}]$. La fibre en H_2 s'identifie bien à $V[1_{G_1}]$. □

1.2 Représentations l-modulaires des groupes réductifs p-adiques

Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique résiduelle p et de cardinal résiduel q. Tout ce qui suit, quand les énoncés font sens, est aussi valable sur les corps finis. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. On considère les points rationnels $G = \mathbf{G}(F)$, ce qui est habituellement nommé – non sans prêter à confusion – un groupe réductif connexe sur F. Un tel groupe est toujours un groupe localement profini pour la topologie induite par celle de F. Il est également unimodulaire.

Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique $l \neq p$. On fixe dès à présent une racine carrée de q dans R. Les faits suivants sont exposés dans [Vig96, Chap. II] et constituent les éléments de base pour étudier les représentations des groupes réductifs connexes. Soit A_0 un tore déployé maximal. On fixe un parabolique minimal P_0 de G qui contient A_0, de sorte qu'on appelle *paraboliques standards* les sous-groupes paraboliques de G contenant P_0 ; et *Levi standards* les sous-groupes de Levi de G qui contiennent A_0.

1.2.1 Induction et restriction paraboliques

Soit $P = MN$ un parabolique de G. L'induction parabolique est le foncteur :

$$i_P^G : \mathrm{Rep}_R(M) \to \mathrm{Rep}_R(G)$$

obtenu comme la composée de l'extension triviale de l'action de N via la projection $P \to P/N \simeq M$ et de l'induite normalisée de P à G. Signalons au passage qu'il n'y a qu'une seule induite de P à G. En effet, comme $P\backslash G$ est compact, les deux induites de la Définition 1.1.3.1 coïncident. On définit la restriction parabolique, ou foncteur de Jacquet, associé à $P = MN$:

$$r_G^P : \mathrm{Rep}_R(G) \to \mathrm{Rep}_R(M)$$

comme la composée de la restriction au sous-groupe P avec les coinvariants normalisés vis-à-vis du radical unipotent N de P.

Proposition 1.2.1.1 ([Vig96, II.2.1 & II.5.13])**.** *On a les propriétés classiques suivantes :*

1. *ces deux foncteurs sont exacts, et transitifs ;*
2. *ils respectent l'admissibilité et la longueur finie ;*
3. *r_G^P est l'adjoint à gauche de i_P^G ;*

4. i_P^G *commute à la contragrédiente.*

La propriété d'adjonction entre i_P^G et r_G^P provient essentiellement de la Proposition 1.1.3.2 et est plus connue sous le nom de *réciprocité de Frobenius*. La dernière propriété est à mettre en relation avec la Proposition 1.1.3.3 et signifie qu'on a $i_P^G(\sigma^\vee) \simeq i_P^G(\sigma)^\vee$. On peut se demander s'il existe des résultats similaires aux deux précédents, à savoir : l'induction parabolique admet-elle un adjoint à droite ? quid de la contragrédiente et de la restriction parabolique ? Il se trouve que ces deux questions sont intimement liées. Les résultats sont bien plus partiels que dans où R est le corps des nombres complexes. Ils sont cependant valides [Vig96, II.3.8] dans la sous-catégorie des représentations admissibles. C'est parce que une représentation admissible est isomorphe à son bidual que la situation se révèle plus simple.

Soit $P = MN$ un parabolique. On note P^{op} le parabolique opposé vis-à-vis de M. La *dualité de Casselman* est valable pour les représentations admissibles :

Proposition 1.2.1.2 ([Vig96, II.3.8])**.** *Pour tout parabolique standard $P = MN$ et toute représentation admissible π dans $\mathrm{Rep}_R(G)$, on a :*

$$r_G^P(\pi)^\vee \simeq r_G^{P^{op}}(\pi^\vee).$$

Ceci entraîne que $r_G^{P^{op}}$ est l'adjoint à droite de i_P^G dans la sous-catégorie des représentations admissibles de G. De plus, pour toute représentation σ de M, on a :

$$\mathrm{Hom}_G(i_P^G(\sigma), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_M(\sigma, r_G^{P^{op}}(\pi)).$$

En procédant en sens inverse, il existe une condition nécessaire pour que la dualité de Casselman soit valide. D'après [Dat09], si la propriété de seconde adjonction est vérifiée, alors, sont noethériennes, la catégorie $\mathrm{Rep}_R(G)$ et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G,H)$ pour tout pro-p-sous-groupe ouvert H de G.

Un lemme utile [MS14, Lem. 2.4.]. Il existe un énoncé analogue de ce lemme en termes de quotient et de parabolique opposé. Même si on ne l'utilise pas par la suite, il est signalé comme un corollaire immédiat à toutes fins utiles.

Lemme 1.2.1.3. *Soit $P = MN$ un parabolique de G. Soit σ une représentation irréductible de M telle que la semi-simplifiée de $r_G^P(i_P^G(\sigma))$ contienne σ avec multiplicité 1. Alors $i_P^G(\sigma)$ contient une unique sous-représentation irréductible. De plus, la multiplicité de cette sous-représentation est* 1.

Démonstration. Tout d'abord, pour toute sous-représentation irréductible $\pi \subset i_P^G(\sigma)$, on a par réciprocité de Frobenius $r_G^P(\pi) \to \sigma$. De plus, par exactitude du foncteur de Jacquet, on a $r_G^P(\sigma) \subset r_G^P(i_P^G(\sigma))$. On en déduit que la longueur du socle de $i_P^G(\sigma)$ – *i.e.* son plus grand module semi-simple – est majorée par la multiplicité de σ dans la semi-simplifiée de $r_G^P(i_P^G(\sigma))$. Comme $i_P^G(\sigma)$ est de longueur finie, la longueur de son socle est au moins 1. □

Rappelons que toute représentation irréductible dans $\mathrm{Rep}_R(G)$ est admissible [Vig96, II.2.8]. On déduit de la dualité de Casselman :

Corollaire 1.2.1.4. *Soit $P = MN$ un parabolique de G. Soit σ une représentation irréductible de M telle que la semi-simplifiée de $r_G^{P^{op}}(i_P^G(\sigma))$ contienne σ avec multiplicité 1. Alors $i_P^G(\sigma)$ possède un unique quotient irréductible. De plus, la multiplicité de ce quotient est* 1.

1.2.2 Cuspidales, supercuspidales, et support

Soit M_1 et M_2 deux sous-groupes de Levi standards de G. On dit que M_1 est associé à M_2 s'ils sont conjugués. Pour deux sous-groupes de Levi associés M_1 et M_2, on dit que $\pi_1 \in \mathrm{Rep}_R(M_1)$ est associée à $\pi_2 \in \mathrm{Rep}_R(M_2)$ si π_1 est conjuguée à π_2. La *classe d'association* de (M, π) est l'ensemble des (M', π') tels que π est associée à π'.

Une représentation σ dans $\mathrm{Rep}_R(G)$ est dite *cuspidale* si elle est annulée par tous les foncteurs de Jacquet propre *i.e.* pour tout parabolique propre $P = MN$ de G, on a $r_G^P(\sigma) = 0$. Soit (π, V) une représentation irréductible de G. Il existe alors [Vig96, II.2.4] un parabolique standard $P = MN$ et une représentation irréductible cupsidale ρ de M telle que $\pi \subset i_P^G(\rho)$. On définit le support cuspidal de π comme l'ensemble des classes d'association de telles paires (M, ρ).

Proposition 1.2.2.1 ([Vig96, II.2.20.]). *La classe d'association de (M, ρ) est unique. On dit dans ce cas que le support cuspidal est unique.*

On appelle *supercuspidale* une représentation irérductible qui n'est sous-quotient d'aucune induite parabolique propre. Une représentation supercuspidale est cuspidale. Soit (π, V) une représentation irréductible de G. Il existe alors un parabolique standard $P = MN$ et une représentation irréductible supercuspidale ρ de M telle que π soit un sous-quotient de $i_P^G(\rho)$. Contrairement au cas complexe, le support supercuspidal n'est pas unique en général pour les représentations modulaires. Il existe un contre-exemple dans le cas fini [Dud18] – pour le groupe $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{F}_q)$ quand $\ell / q^2 + 1$ – qui a été relevé au cas p-adique [Dat18]. En revanche, l'unicité du support supercuspidal est au moins vraie pour GL_n. Ce résultat a d'abord été prouvé sur un corps p-adique [Vig96], puis a été étendu aux algèbres à division [MS14] :

Proposition 1.2.2.2 ([Vig96], [MS14]). *Soit D une algèbre à division de dimension finie sur F. Dans le groupe $GL_n(D)$, le support supercuspidal est unique.*

1.2.3 Banalité

Bien évidemment, les définitions précédentes ne sont pas vides puisqu'il existe des exemples dans le cas modulaire de représentations cuspidales qui ne sont pas supercuspidales. On perd également la projectivité modulo centre le centre des représentations cuspidales. Par analogie avec les représentations des groupes finis, les problèmes interviennent principalement quand la caractéristique du corps est « mauvaise » vis-à-vis du pro-ordre du groupe G et des ses sous-groupes de Levi. Nous donnons la version la plus forte pour la définition de l banal.

Définition 1.2.3.1. On note l la caractéristique de R. On dit que l'entier l est banale vis-à-vis de G si, ou bien $l = 0$; ou bien $l \neq 0$ ne divise pas le pro-ordre de G.

Remarque 1.2.3.2. Il existe des versions plus faibles pour définir la banalité [Vig96, II.3.9]. La première est d'imposer quand $l > 0$ que la caractéristique l ne divise ni $|G/Z(G)|$, ni $|M/Z(M)|$ pour tout sous-groupe de Levi M de G. Il y en a également deux autres encore plus faibles qui sont impliquées par cette dernière version, à savoir : toute représentation cuspidale d'un Levi de G est supercuspidale ; toute représentation cuspidale d'un Levi de G est projective modulo le centre. Rappelons [Vig96, II.3.9] que la deuxième implique la première car une représentation cuspidale projective modulo le centre est toujours supercuspidale. On emploiera le mot banal seulement pour se conformer à la définition que nous avons donnée. Nous mentionnerons parfois, et seulement à titre de remarque, l'hypothèse la plus faible qui marche, par exemple : banal faible ; cusp = supercusp ; cusp $\Rightarrow$ proj.

Remarque 1.2.3.3. Si G est abélien, l est automatiquement banal faible puisque G ne contient aucun parabolique et $Z(G) = G$. En particulier, deviennent tautologiques : cusp = supercusp et cusp $\Rightarrow$ proj.

Il faut prendre garde au fait que l'on perd en général des résultats incontournables du cas complexe.

Proposition 1.2.3.4 ([Vig96, II.3.]). *On suppose que cusp = supercusp vis-à-vis de G. Soient M_1 un Levi standard de G, P_1 le parabolique standard associé et $\rho_1 \in \mathrm{Rep}_R(M_1)$ une représentation cuspidale. On emploie les mêmes notations pour un sous-groupe de Levi standard M_2.*

1. *si ρ_2 n'est pas associée à ρ_1, les induites paraboliques $i_{P_1}^G(\rho_1)$ et $i_{P_2}^G(\rho_2)$ n'ont aucun sous-quotient en commun ;*
2. *si ρ_2 est associée à ρ_1, les induites paraboliques $i_{P_1}^G(\rho_1)$ et $i_{P_2}^G(\rho_2)$ ont mêmes facteurs de Jordan-Hölder.*

En particulier dans le contexte cusp = supercusp, le support supercuspidal est unique.

Le fait suivant sera d'une importance capitale dans la Section 5.2.

Proposition 1.2.3.5. *Soit G un groupe à centre compact $Z(G)$. On suppose que ℓ ne divise pas le pro-ordre de $Z(G)$. Alors toute représentation projective modulo le centre (resp. injective modulo le centre) est projective (resp. injective).*

Démonstration. Soit χ un caractère lisse de $Z(G)$. On note $\mathrm{Rep}_R(G,\chi)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Rep}(G)$ des représentations qui ont pour caractère central χ. Par définition, une représentation π est projective modulo le centre si elle a un caractère central χ_π et qu'elle est projective dans la sous-catégorie $\mathrm{Rep}_R(G,\chi_\pi)$. Comme Z est compact, l'hypothèse sur ℓ entraîne que la catégorie $\mathrm{Rep}_R(Z(G))$ est semi-simple. Il vient alors une décomposition en produit de catégories :

$$\mathrm{Rep}_R(G) = \prod_{\chi \in \widehat{Z}_R} \mathrm{Rep}(G,\chi).$$

Cette décomposition entraîne que π est projective dans $\mathrm{Rep}_R(G)$. Le fait d'être injective se traite de la même manière. $\square$

Corollaire 1.2.3.6. *Soit G un groupe à centre compact. On suppose que ℓ est banal vis-à-vis de G. Alors toute représentation irréductible cuspidale est projective et injective.*

Démonstration. En effet, la Proposition 1.1.1.2 implique en particulier que ℓ ne divise pas en particulier le pro-ordre de $G/Z(G)$. Donc toute représentation irréductible cuspidale est projective et injective modulo le centre d'après la Remarque 1.2.3.2. On peut retirer la mention « modulo le centre » car, toujours d'après la Proposition 1.1.1.2, ℓ ne divise pas le pro-ordre de $Z(G)$. $\square$

1.3 Extensions centrales et représentations projectives

Extensions centrales. Soit G un groupe et A un groupe abélien. On dit que E est une *extension de G par A* si on a une suite exacte courte $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$. Dans ce cas, cela munit A d'une structure de G-module. En effet, si $\widetilde{g} \in E$ est un élément qui relève g, alors $g.a = i^{-1}(\widetilde{g}\, i(a)\, \widetilde{g}^{-1})$ ne dépend pas du choix de $\widetilde{g}$. Deux extensions E et E' de G par A sont dites *équivalentes* (ou *isomorphes*) s'il existe un isomorphisme $\phi : E \to E'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_A"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_G"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "p'"] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

On a le théorème de classification suivant :

Théorème 1.3.0.7. [Wei94, Th. 6.6.3.] *On suppose que A est doté d'une structure de G-module. Le groupe de cohomologie $H^2(G, A)$ classifie les classes d'équivalences d'extensions E de G par A telle que la structure de G-module induite par E sur A soit la structure initiale de G-module sur A.*

On dit que E est une *extension centrale de G par A* si $A \subset Z(E)$. Ceci équivaut à dire que la structure de G-module sur A est triviale. Donnons quelques idées pour interpréter le théorème précédent dans le cas des extensions centrales.

Soit E une extension centrale de G par A. Toute section $\sigma : G \to E$ détermine, via l'application $u \in E \mapsto (p(u), i^{-1}(u\sigma(u)^{-1}))$, une loi de groupe sur l'ensemble $G \times A$. Celle-ci est donnée par le 2-cocycle $c_\sigma(g, g')$ (à valeurs dans A) déterminé par $\sigma(g)\sigma(g') = i(c_\sigma(g, g'))\sigma(gg')$. Et toute autre section $\sigma' : G \to E$ définit un 2-cocycle qui lui est cohomologique. En effet, soit $f : G \to A$ telle que $\sigma'(g) = i(f(g))\sigma(g)$. Alors $c_{\sigma'}(g, g') = f(gg')f(g)^{-1}f(g')^{-1}c_\sigma(g, g')$ c'est-à-dire $c_{\sigma'} = \partial f\ c_\sigma$. L'ensemble des 2-cocycles ainsi construits définissent bien une classe de cohomologie dans $H^2(G, A)$. Réciproquement, $H^2(G, A)$ identifie (à équivalence près) l'ensemble des structures de groupes qui font de $G \times A$ une extension centrale de G par A.

On connaît bien la structure des isomorphismes qui rendent une extension centrale équivalente à elle-même :

Proposition 1.3.0.8. *L'ensemble des automorphismes ϕ de E tels que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal, "Id_A"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal, "Id_G"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "p"] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

commute est en bijection avec les caractères de G dans A.

Démonstration. Soit un tel ϕ. On pose pour $u \in E$, $\chi(u) = \phi(u)u^{-1}$. On voit facilement que : l'image de χ est dans $i(A)$; le noyau de χ contient $i(A)$ qui est distingué dans E. De plus χ est un morphisme de groupe : $\chi(uu') = \phi(uu')(uu')^{-1} = \phi(u)\phi(u')u'^{-1}u^{-1} = \phi(u')u'^{-1}\phi(u)u^{-1}$ car $\phi(u')u'^{-1} \in i(A) \subset Z(E)$. Ainsi, χ se factorise en un caractère de G dans $i(A)$, donc de G dans A par injectivité de i. Réciproquement, on peut faire l'opération inverse : à tout caractère $\chi : G \to A$ on associe un automorphisme $\phi(u) = i(\chi(p(u)))u$ de E qui vérifie les propriétés escomptées. $\square$

Corollaire 1.3.0.9. *Si G est parfait i.e. égal à son propre groupe dérivé, alors les extensions centrales de G au sein d'une même classe d'équivalence sont toutes canoniquement isomorphes.*

Corollaire 1.3.0.10. *Si G est parfait et si A est un groupe abélien fini de cardinal premier, alors toute extension centrale non-triviale de G par A est parfaite.*

Démonstration. On a pour tout $u \in E$, $p(u) \in G = [G, G]$, où $[G, G]$ désigne le groupe dérivé de G. Par surjectivité du morphisme de groupes p, il existe donc $u' \in [E, E]$ qui relève $p(u)$ *i.e.* $uu'^{-1} \in \ker(p)$. En particulier, le morphisme de groupes p induit un morphisme de groupes surjectif $p|_{[E,E]} : [E, E] \to G$, qui ne peut être un isomorphisme car E est une extension non-triviale de G par A. Le groupe dérivé de E contient donc un élément non-trivial de $i(A)$, et cet élément engendre $i(A)$ si A est de cardinal fini premier. $\square$

Extensions centrales topologiques. On peut généraliser la discussion précédente au cas des groupes topologiques. Soit G un groupe topologique localement compact et séparable, et A un groupe topologique abélien localement compact et séparable muni d'une structure de G-module topologique (G agit sur A par homéomorphismes). Une *extension topologique de G par A* est une suite exacte de groupes topologiques $1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$ telle que i soit un homéomorphisme sur un sous-groupe fermé de E et p induit un isomorphisme de groupes topologiques $E/i(A) \simeq G$. Dans ce contexte, [Moo68] a défini des groupes de cohomologie $H^n_{\text{top}}(G, A)$ qui prennent en compte la topologie des groupes, et qui redonne un résultat analogue au théorème de classification précédent. Le groupe de cohomologie $H^2_{\text{top}}(G, A)$ classifie donc les extensions topologiques de G par A.

Soit W un espace symplectique sur F un corps local non-archimédien. On s'intéresse aux extensions centrales topologiques de $G = \text{Sp}(W)$. On munit G de la topologie issue de F ; et $A = \{\pm 1\}$ de la topologie discrète et d'une structure de G-module triviale. Grâce à [Moo68, Th. 10.4.], on sait que :

Proposition 1.3.0.11. *$H^2_{top}(\text{Sp}(W), \{\pm 1\}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

En d'autres termes il n'y a que deux classes d'équivalence d'extensions centrales topologiques du groupe symplectique par $\{\pm 1\}$: la triviale qui s'identifie au produit cartésien $\text{Sp}(W) \times \{\pm 1\}$ et un « revêtement d'ordre 2 non-trivial », appelé *le groupe métaplectique réduit* et noté $\widehat{\text{Sp}}(W)$. Du fait que le groupe symplectique soit parfait, on déduit des deux corollaires précédents que : premièrement, la classe d'équivalence d'un tel revêtement est canonique ; deuxièmement, le groupe métaplectique réduit est parfait.

Définition 1.3.0.12. Soit R un anneau. On le munit de la topologie discrète. On appelle *groupe métaplectique sur R* la classe d'isomorphisme :

$$\widetilde{\text{Sp}}(W) = \widehat{\text{Sp}}(W) \times R^\times / \sim$$

où $((g, \varepsilon), r) \sim ((g', \varepsilon'), r') \Leftrightarrow g = g'$ et $(\varepsilon, r) \in \{(\varepsilon', r'), (-\varepsilon', -r')\}$.

Dit grossièrement, on a « identifié » les $\{\pm 1\}$ de chacun des deux groupes. On voit de plus $R^\times$ comme un sous-groupe de $\widetilde{Sp}(W)$ via l'inclusion évidente $r \in R^\times \mapsto ((1, 1), r) \in \widetilde{\text{Sp}}(W)$.

Remarque 1.3.0.13. Il faut bien faire attention au fait que ce groupe métaplectique n'est pas exactement le groupe métaplectique classique quand $R = \mathbb{C}$. En effet, $\mathbb{C}$ n'est habituellement pas muni de la topologie discrète. Cependant, comme le 2-cocyle métaplectique est localement constant sur $\mathrm{Sp}(W)$, le groupe métaplectique classique est *a fortiori* un groupe topologique si $\mathbb{C}$ est muni de la topologie discrète.

Représentations projectives. Soit R un anneau. Une *représentation projective de G* est la donnée d'un R-module S et d'un morphisme de groupes $G \to \mathrm{PGL}(S)$. Il existe une philosophie pour traiter ce type de représentations : toute représentation projective se relève en une « vraie » représentation d'une extension centrale du groupe en question. Cette opération est réalisée à l'aide du produit fibré. Soit $\rho : G \to \mathrm{PGL}(S)$ une représentation projective de G. Alors le produit fibré $\widetilde{G}_S = G \times_{\mathrm{PGL}(S)} \mathrm{GL}(S)$ de G et $\mathrm{GL}(S)$ au-dessus de $\mathrm{PGL}(S)$ est une extension centrale de G qui relève la représentation projective ρ en une représentation $\widetilde{\rho}$ de $\widetilde{G}_S$ via la projection sur la deuxième coordonnée. Pour le reformuler en terme de diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G}_S \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d] & \mathrm{GL}(S) \arrow[d, "\mathrm{red}"] \\
G \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{PGL}(S)
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.3.0.14. *Sous les hypothèses précédentes, on a une suite exacte courte :*

$$1 \to R^\times \to \widetilde{G}_S \to G \to 1 \tag{1.1}$$

Démonstration. Pour tout $g \in G$, on choisit un relevé M_g de $\rho(g)$ dans $\mathrm{GL}(S)$. Alors $\widetilde{G}_S$ s'identifie à l'ensemble $\{(g, \lambda M_g) \mid \lambda \in R^\times\}$. On voit facilement que le noyau de la projection sur la première coordonnée $\widetilde{G}_S \to G$ est $\{(1_G, \lambda \mathrm{Id}_S) \mid \lambda \in R^\times\}$ qui est canoniquement isomorphe à $R^\times$. $\square$

On suppose maintenant que G est un groupe topologique. On munit S de la topologie discrète et $\mathrm{GL}(S)$ de la topologie de la convergence simple.

Proposition 1.3.0.15. *Si le morphisme $\rho : G \to PGL(S)$ est continu, alors $\widetilde{G}_S$ est le produit fibré dans la catégorie des groupes topologiques. À ce titre, la représentation définie par $\widetilde{\rho}$ est lisse. Et la suite exacte :*

$$1 \to R^\times \xrightarrow{i} \widetilde{G}_S \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{1.2}$$

entraîne que $\widetilde{G}_S$ une extension centrale topologique de G par $R^\times$.

Démonstration. La lissité découle du fait que $\widetilde{\rho}$ est continu car c'est la seconde projection. Il faut montrer ensuite que cette suite définit bien une extension topologique. Tout d'abord, la topologie trace de $\mathrm{GL}(S)$ sur son centre $R^\times$ est la topologie discrète. Et $i(R^\times)$ est l'image réciproque par $\widetilde{\rho}$ du fermé $\{\mathrm{Id}_S\}$ de $\mathrm{GL}(S)$, donc fermé. On vérifie facilement sur un ouvert produit que $p : \widetilde{G}_S \to G$ est ouverte, et réalise donc un isomorphisme de groupes topologiques $\widetilde{G}_S / i(R^\times) \simeq G$. $\square$

Sections locales et ouverts trivialisant. Une *section locale de* $p : \widetilde{G}_S \to G$ est la donnée d'un ouvert U de G et d'une application continue $s : U \to \widetilde{G}_S$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_U$. Quitte à translater (la multiplication par un élément est un homéomorphisme dans les groupes topologiques), l'existence d'une section locale de p au voisinage d'un point est équivalente à l'existence de sections locales de p au voisinage de tout point. De plus, on dit qu'un sous-groupe ouvert K de G est un *sous-groupe ouvert trivialisant* s'il existe une section s sur K telle que $s : K \to \widetilde{G}_S$ est un morphisme de groupes et induit un isomorphismes de groupes topologiques $K \times R^\times \xrightarrow{\sim} p^{-1}(K)$.

Proposition 1.3.0.16. *S'il existe un sous-groupe ouvert trivialisant, alors il existe une section globale de p.*

Démonstration. S'il existe un tel sous-groupe ouvert, alors il existe une section locale $s : K \to \widetilde{G}$ qui soit continue. Quitte à translater par des représentants de G/K, on peut supposer que cela entraîne l'existence de sections locales $s_g : gK \to \widetilde{G}_S$ de p. Comme les ouverts gK sont disjoints, on peut recoller ces sections. □

La donnée d'une section globale $\sigma : G \to \widetilde{G}_S$ de p détermine alors un 2-cocycle topologique *i.e.* continu. On le note encore c_σ. Celui-ci induit un isomorphisme de groupes topologiques entre l'extension centrale topologique $\widetilde{G}_S$ et celle sur $G \times R^\times$ associée à la loi de groupe du 2-cocycle en question :

$$\widetilde{G}_S \simeq G \times R^\times$$

où la loi de droite $(g, \lambda).(g', \lambda') = (gg', c_\sigma(g, g')\lambda\lambda')$. Toute autre section globale σ' de p diffère de σ par une fonction continue $f : G \to A$ telle que $\sigma(g) = i(f(g))\sigma'$. Le 2-cocycle $c_{\sigma'} = \partial f \ c_\sigma$ est dans la même classe de cohomologie que c_σ.

Pour finir, les isomorphismes d'extensions centrales topologiques sont les isomorphismes d'extensions centrales qui sont des homéomorphismes. Ainsi, les seuls automorphismes d'extension centrale topologique sont donnés par les caractères continus de G dans $R^\times$. Comme $R^\times$ est muni de la topologie discrète, ces caractères sont des applications localement constantes.

Chapitre 2

Contexte de la correspondance thêta

2.1 Rappels sur les espaces ε-hermitien et leurs paraboliques

Généralités sur les espaces ε-hermitiens. Soit D un corps – pas nécessairement commutatif, mais de dimension finie sur son centre – muni d'une involution τ *i.e.* d'un anti-automorphisme de carré l'identité. Soit W un espace vectoriel à droite sur D de dimension finie. Soit ε dans le centre de D tel que $\varepsilon\tau(\varepsilon) = 1$. Un *produit ε-hermitien* est une application sesquilénaire non-dégénérée $<,>$ de $W \times W$ dans D telle que pour tout $w, w' \in W$, $d, d' \in D$:

$$< wd, w'd' >= \tau(d) < w, w' > d \;\; et \;\; < w'w >= \varepsilon\tau(< w, w' >)$$

Deux éléments $w, w' \in W$ sont *orthogonaux* si leur produit $< w, w' >$ est nul. Deux espaces ε-hermitiens sont dits *isométriques* s'il existe une application D-linéaire bijective de l'un sur l'autre conservant le produit. Les isométries de $(W, <, >)$ dans lui-même forment le *groupe des isométries* de $(W, <, >)$, aussi appelé *groupe unitaire* et noté $U(W)$.

Lien avec les groupes « classiques ». Ces groupes d'isométrie $U(W)$ généralisent les définitions de groupes symplectiques, orthogonaux et unitaires. On note F le corps commutatif formé par les points fixes de τ et E le centre de D. On suppose désormais que le corps F est soit fini, soit local non archimédien. D'après [MVW87, Chap.1, I.4], E est une extension séparable de degré au plus 2 sur F. Dans le cas où D est commutatif, on a donc $D = E$ et on choisit pour l'involution τ le générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$. on retrouve alors :

D	commutatif		
(E, ε)	$E = F, \varepsilon = -1$, $\mathrm{char} F \neq 2$	$E = F, \varepsilon = 1$	$[E : F] = 2, \varepsilon = \pm 1$
$U(W)$	$\mathrm{Sp}(W)$	$O(W)$	$U(W)$
Nom	groupe symplectique	groupes orthogonaux	groupe unitaires

TABLE 2.1 – Groupes classiques et espaces ε-hermitiens.

On peut donner plus de précision [Vig96, Chap.1, I.4] sur le cadre qui motive ici ce travail :

F	fini	local non archimédien	
D	commutatif	commutatif	non commutatif
(D,E,F)	$D=E$ et $[E:F]\leq 2$	$D=E$ et $[E:F]\leq 2$	D corps de quat. sur $E=F$
τ	$<\tau>=\mathrm{Gal}(E/F)$	$<\tau>=\mathrm{Gal}(E/F)$	involution canonique

TABLE 2.2 – Le cas fini et local non archimédien.

En résumé, quand D est commutatif, nous serons dans une des trois situations exposées en fonction de la valeur de ε : symplectique, orthogonale ou unitaire. Nous appellerons *groupes unitaires quaternioniques* les groupes d'isométrie $U(W)$ obtenus quand D est un corps de quaternions sur $E=F$.

Remarque 2.1.0.17. On peut toujours se ramener à $\varepsilon\in\{\pm 1\}$.

Plan hyperbolique. On note $D(a)$ les *espaces ε-hermitien de dimension* 1 : si $a\in D$ vérifie $a=\varepsilon\tau(a)$, on munit le D-espace vectoriel à droite D du produit ε-hermitien $<d,d'>=\tau(d)ad'$. On appelle *plan hyperbolique ε-hermitien*, noté H, l'espace vectoriel $W=D^2$ muni du produit ε-hermitien :

$$<(d_1,d_2),(d_1',d_2')>=\tau(d_1)d_2'+\varepsilon\tau(d_2)d_1'.$$

Sous-espaces totalement isotropes et série de Witt. Soit W un espace ε-hermitien. On dit que $w\in W$ est *isotrope* si $<w,w>=0$. Si W contient un vecteur isotrope, on peut montrer qu'il existe une isométrie entre H et un sous-espace vectoriel de W contenant w. *L'indice de Witt de* W est défini comme le plus grand entier naturel m tel que mH soit isométrique à un sous-espace vectoriel de W. Un sous-espace vectoriel X de W est dit *totalement isotrope* si la restriction de $<,>$ à $X\times X$ est nulle. Si X est un sous-espace totalement isotrope de W, alors il existe un sous-espace totalement isotrope X^* de W tel que $(X+X^*,<,>)$ soit un espace ε-hermitien isométrique à $\dim(X)$ H. Et il existe alors un unique W^0 qui est l'orthogonal de $X+X^*$ dans W tel que $W=(X+X^*)\overset{\perp}{\oplus}W^0$ que l'on note également $W=X\oplus W^0\oplus X^*$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. On dira alors que X et X^* sont en dualité via $<,>$. Notons que W^0 est isométrique à $X^{\perp}/X$.

Soit X un sous-espace totalement isotrope maximal de W et X^* un sous-espace dual. En particulier on a $\dim(X)=m$ l'indice de Witt de W. On appelle *partie anisotrope de* W la classe d'isométrie de W^0, l'orthogonal de $X\oplus X^*$ dans W. Cette classe ne dépend évidemment ni du sous-espace totalement isotrope maximal X choisi, ni de son dual. On dit que la suite d'espaces ε-hermitiens $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une *tour de Witt construite sur* W si $W_0=W$ et W_{k+1} est isométrique à $W_k\overset{\perp}{\oplus}H$. Enfin, on définit la *série de Witt associée à* W : ce sont l'ensemble des espaces ε-hermitiens W' tels qu'il existe un entier naturel k vérifiant, ou bien W est isométrique à $W'\overset{\perp}{\oplus}kH$, ou bien $W\overset{\perp}{\oplus}kH$ est isométrique à W'. Pour finir, deux espaces ε-hermitiens sont dans la même série de Witt si et seulement leurs parties anisotropes sont isométriques.

Espaces scindés, lagrangiens et polarisation complète. On note $\Omega(W)$ l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de W. On dit que W est *scindé* ou *hyperbolique* s'il est isométrique à une copie de plans hyperboliques. Ou dit autrement : s'il est dans la série de Witt que l'espace vectoriel nul. En particulier, cela signifie que les éléments de

$\Omega(W)$ sont de dimension $\frac{\dim(W)}{2}$ et que la dimension de W est paire. Quand W est un espace vectoriel symplectique, les éléments de $\Omega(W)$ sont également appelés *lagrangiens*. Supposons W est hyperbolique. On appelle *polarisation complète* de W toute décomposition $W = X + X^*$ où X et X^* sont dans $\Omega(W)$ (d'intersection nulle). Soit $g \in U(W)$. Il existe alors d'uniques applications linéaires $a \in \mathrm{Hom}_D(X, X)$, $b \in \mathrm{Hom}_D(X, X^*)$, $c \in \mathrm{Hom}_D(X^*, X)$ et $d \in \mathrm{Hom}_D(X^*, X^*)$ telles que $g(w) = g(x + x^*) = (a(x) + c(x^*)) + (b(x) + d(x^*))$. On note leurs adjoints vis-à-vis du produit hermitien a^*, b^*, c^* et d^*. Alors, les morphismes correspondants pour g^{-1} sont $d^* \in \mathrm{Hom}(X, X)$, $b^* \in \mathrm{Hom}(X, X^*)$ $c^* \in \mathrm{Hom}_D(X^*, X)$ et $a^* \in \mathrm{Hom}_D(X^*, X^*)$ *i.e.* $g^{-1}(x+x^*) = (d^*(x)+c^*(x^*))+(b^*(x)+a^*(x))$. En représentation matricielle cela donne pour $W = X + X^*$:

$$\text{si } g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ alors } g^{-1} = \begin{bmatrix} d^* & b^* \\ c^* & a^* \end{bmatrix}.$$

Action sur les drapeaux et paraboliques de $U(W)$. Soit $(W, <,>)$ un espace ε-hermitien. Soit $\Phi = \{0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r\}$ un drapeau totalement isotrope. On appelle *type du drapeau* Φ la suite d'entiers $\{0 < \dim(X_1) < \cdots < \dim(X_r)\}$. On note $\Omega_{\text{type}(\Phi)}(W)$ l'ensemble des drapeaux totalement isotropes de même type que Φ. Le groupe des isométries $U(W)$ agit sur l'ensemble de ces drapeaux, et on note $P(\Phi)$ le stabilisateur associé à Φ.

Proposition 2.1.0.18. *L'action de $U(W)$ sur les drapeaux totalement isotropes préserve le type des drapeaux et agit transitivement sur les drapeaux d'un type donné. Et l'invariant associé à une orbite est le type du drapeau. De plus, si Φ est une drapeau totalement isotrope, on a*

$$\mathcal{O}_\Phi \simeq U(W)/P(\Phi) \simeq \Omega_{type(\Phi)}(W)$$

Démonstration. Ce fait se déduit du théorème de Witt [MVW87, Chap. 1] :

Théorème 2.1.0.19 (Witt)**.** *Soit V est un sous-espace vectoriel de W. Toute une application linéaire injective $f : V \to W$ qui respecte le produit ε-hermitien i.e. $\forall v, v' \in V$, $< f(v), f(v') >=< v, v' >$ peut être prolongée en une isométrie de W.*

En effet, étant donné deux drapeaux de même type, il existe toujours une application linéaire injective qui envoie l'un sur un autre. Par le théorème de Witt, on peut toujours prolonger une telle application en un élément de $U(W)$. Donc pour tout drapeau totalement isotrope Φ, l'orbite de Φ est $\mathcal{O}_\Phi \simeq U(W)/P(\Phi)$ et s'identifie à $\Omega_{\text{type}(\Phi)}(W)$, les drapeaux totalement isotropes de même type que Φ. □

Par ailleurs, $P(\Phi)$ est le sous-groupe parabolique de $U(W)$ associé à Φ, dont on note $N(\Phi)$ le radical unipotent. On sait que les sous-groupes de Levi de $P(\Phi)$ sont uniques à conjugaison près par un élément de $N(\Phi)$.

Paraboliques maximaux. On s'intéresse à une classe particulière de drapeaux auxquels correspondent des sous-groupes paraboliques maximaux. Si $X \neq \{0\}$ est un espace totalement isotrope de W, $\{0 \subsetneq X\}$ est un drapeau dont on note $P(X) = P(\{0 \subsetneq X\})$ le sous-groupe parabolique correspondant. Tout facteur de Levi M de $P(X)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_D(X) \times U(W^0)$ où W^0 est un sous-espace ε-hermitien de W isométrique à $X^\perp/X$. Le radical unipotent $N(X)$ est un sous-groupe unipotent à deux pas, au sens où il est en général extension de deux groupes additifs. Le premier, $N_1(X)$, est central dans $N(X)$ et on a la suite exacte courte :

$$1 \to N_1(X) \to N(X) \to \mathrm{Hom}_D(W^0, X) \to 1$$

où $\mathrm{Hom}_D(W^0, X)$ est le deuxième groupe en question (qui est évidemment abélien). Si ce dernier est non-trivial, la suite n'est pas scindée. Décrivons explicitement ces groupes pour une décomposition de la forme $W = X \oplus W^0 \oplus X^*$:

1. on note $\mathfrak{A} = \{s \in \mathrm{Hom}(X, X^*) \mid s^* = -s\}$, alors on a l'isomorphisme $n_1 : \mathfrak{A} \to N_1(X)$:
$$s \mapsto n_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. une section (et pas un morphisme !) $n_2 : \mathrm{Hom}_D(W^0, X) \to N(X)$ peut-être choisie comme :
$$h \mapsto n_2(h) = \begin{bmatrix} 1 & h & -\frac{hh^*}{2} \\ 0 & 1 & -h^* \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. le Levi le mieux adapté à cette décomposition est alors donné par $m : \mathrm{GL}(X) \times U(W^0) \to P(X)$:
$$m : (a, u) \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & (a^*)^{-1} \end{bmatrix}$$

Paramétrage de $\Omega(W)$ dans le cas hyperbolique. Si W est hyperbolique, on se donne une décomposition $W = W_1 \overset{\perp}{\oplus} (-W_2)$ en espaces ε-hermitiens, où $-W_2$ est un espace ε-hermitien construit à partir de W_2 en remplaçant simplement le produit ε-hermitien $<,>$ de W_2 par son opposé $-<,>$ (et donc $U(-W_2)$ s'identifie canoniquement à $U(W_2)$). En particulier cela implique que W_1 et W_2 sont dans la même série de Witt. Pour $Z_i \subset W_i$, on note $Z_i^\perp$ l'orthogonal de Z_i dans W_i. On note $P^i(Z_i)$ les paraboliques respectifs de $U(W_i)$ stabilisant Z_i. De plus, quitte à permuter ces deux espaces, on peut supposer que les indices de Witt m_i de W_i vérifient $m_1 \leq m_2$. Soit $n_i = \dim(W_i)$, alors $n_1 - 2m_1 = n_2 - 2m_2$. La décomposition de W induit un paramétrage de $\Omega(W)$:

Proposition 2.1.0.20. *Il existe une bijection entre $\Omega(W)$ et*

$$\{(Z_1, Z_2, \Phi) \mid Z_i \textit{ sous-espace isotrope de } W_i \textit{ et } \phi \textit{ est une isométrie } Z_1^\perp/Z_1 \to Z_2^\perp/Z_2\}.$$

L'action sur $\Omega(W)$ de $U(W_1)U(W_2)$ plongés diagonalement dans $U(W)$ est alors :

$$(u_1, u_2).(Z_1, Z_2, \phi) = (u_1 Z_1, u_2 Z_2, u_2 \phi (u_1)^{-1})$$

Il n'y a qu'un nombre fini d'orbites pour cette action. Ces orbites sont au nombre de $m_1 + 1$ et sont paramétrées par la seule $\dim(Z_1)$. Enfin, le stabilisateur de (Z_1, Z_2, ϕ) dans $U(W_1)U(W_2)$ est :

$$\begin{aligned}\{u_1 u_2 \in U(W_1)U(W_2) \mid u_1 Z_1 = Z_1, u_2 Z_2 = Z_2, u_2 \phi {u_1}^{-1} = \phi\} \\ = \{u_1 u_2 \in P^1(Z_1) P^2(Z_2) \mid u_2 = \phi u_1 \phi^{-1}\}\end{aligned}$$

Il est isomorphe à

$$(GL(Z_1) \times GL(Z_2) \times U(Z_1^\perp/Z_1)) \ltimes (N(Z_1) \times N(Z_2))$$

via $(a_1, a_2, u, n_1, n_2) \mapsto \begin{bmatrix} m(a_1, u)\ n_1 & 0 \\ 0 & m(a_2, \phi u \phi^{-1})\ n_2 \end{bmatrix}.$

Démonstration. Soit Z un sous-espace isotrope maximal de W. On note π_1 la projection sur W_1 parallèlement à W_2. De même pour π_2 la projection sur W_2 parallèlement à W_1. Ainsi $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}_W$. $Z_i = W_i \cap Z$ est un sous-espace isotrope de W_i, et on a $Z_i^\perp = \pi_i(Z)$. En effet, l'inclusion $Z_i^\perp \supset \pi_i(Z)$ est facile à vérifier. On montre ensuite qu'ils ont même dimension : $W_i/Z_i^\perp$ est de même de dimension que Z_i car il s'identifie à son dual. Donc $\dim(Z_1^\perp \oplus Z_2) = \dim(W_1) - \dim(Z_1) + \dim(Z_2)$ et $\dim(Z_1 \oplus Z_2^\perp) = \dim(Z_1) + \dim(W_2) - \dim(Z_2)$, ce qui donne : $\dim(Z_1^\perp \oplus Z_2) + \dim(Z_1 \oplus Z_2^\perp) = \dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W)$. On déduit des égalités $Z = \pi_1(Z) \oplus Z_2 = Z_1 \oplus \pi_2(Z)$ que $Z_i^\perp$ et $\pi_i(Z)$ ont même dimension. Pour finir, l'isométrie est induite par l'application $z = z_1^\perp + z_2 \in Z \mapsto \pi_2(z_2) \in Z_2^\perp$. On compose avec la projection $Z_2^\perp \to Z_2^\perp/Z_2$ et le noyau est exactement $Z_1 \oplus Z_2$. C'est bel et bien une isométrie en vertu de : $< z, z' > = < z_1^\perp, z_1'^\perp > - < z_2^\perp, z_2'^\perp > = 0$ pour toute décomposition de z et z' dans $Z = Z_1^\perp + Z_2^\perp$ (l'écriture n'est pas unique mais ces quantités sont bien définies !).

Réciproquement, soit un triplet (Z_1, Z_2, ϕ) satisfaisant aux hypothèses de la proposition. Cette donnée permet de construire un sous-espace totalement isotrope maximal de W par une opération inverse de la précédente en posant :

$$Z = \{z_1 + z_2 \in W \mid \ z_1 \in Z_1^\perp, z_2 \in Z_2^\perp \text{ et } \phi(z_1 + Z_1) = z_2 + Z_2\}$$

Enfin, de $Z = Z_1^\perp \oplus Z_2 = Z_1 \oplus Z_2^\perp$ et $\dim(Z_i^\perp) = \dim(W_i) - \dim(Z_i)$ on tire également

$$\dim(Z_1) = \dim(Z_2) + (m_1 - m_2)$$

L'action de $U(W_1)U(W_2)$ plongé dans $U(W)$ agit sur Z, et donc sur un triplet par l'action décrite. Et la définition du stabilisateur donne immédiatement les assertions suivantes. □

On tire de ceci un corollaire extrêmement utile qui permet d'expliciter un paramétrage de doubles classes qui apparaîtront, dans le calcul de la filtration de la section 5.1.2, quand on voudra utiliser une version simplifiée du Théorème 1.1.5.1 (lemme géométrique).

Corollaire 2.1.0.21. *Soit X un sous-espace isotrope maximal de W. On identifie alors $\Omega(W)$ à $G/P(X)$.*

1. *il y a une réunion croissante ouverte qui provient de la décomposition en doubles classes de $U(W)$:*

$$U(W_1)U(W_2)\backslash U(W)/P(X) = \bigsqcup_{i=0}^{m_1} \mathcal{O}_i$$

où $\mathcal{O}_i = \{g \in G \mid gP(X) \in \Omega(W)$ *vérifie* $\dim(gP(X) \cap W_1) = i\}$. *Ceci signifie que* $\bigsqcup_{i=0}^{k} \mathcal{O}_i$ *est ouverte pour tout* $k \in [\![0, m_1]\!]$.

2. *Le stabilisateur St_i d'un élément $Z \in \Omega(W) \simeq G/P(X)$ dans une orbite $\mathcal{O}_i$ pour l'action du groupe $U(W_1)U(W_2)$ est isomorphe à*

$$(GL(Z_1) \times GL(Z_2) \times U(W_0)) \ltimes (N(Z_1) \times N(Z_2))$$

où $Z_i = Z \cap W_i$ et $W_0 \simeq Z_1^{\perp}/Z_1 \overset{\phi}{\simeq} Z_2^{\perp}/Z_2$. Il est contenu dans $P^1(Z_1)P^2(Z_2)$ où $P^i(Z_i)$ est le parabolique de $U(W_i)$ qui stabilise $Z_i = Z \cap W_i$. Et le stabilisateur de tout autre élément appartenant à la même orbite lui est conjugué, et est donc contenu à conjugaison près dans $P^1(Z_1)P^2(Z_2)$.

Démonstration. Conséquence directe de la proposition précédente. □

2.2 Calcul du module d'un parabolique

Soit W un espace ε-hermitien de dimension n sur un corps D. Avant d'expliciter le calcul du module δ_P d'un parabolique P de $U(W)$, on fait quelques rappels utiles sur les déterminants. Rappelons qu'il n'existe pas de corps non-commutatifs de dimension finie sur un corps fini.

Déterminant, trace et norme réduites. Soit D un corps quelconque et W un espace vectoriel à droite sur D de dimension finie. Soit $G = \mathrm{GL}_D(W)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles de W. On note $[G, G]$ le groupe dérivé de G. Alors :

Théorème 2.2.0.22. [Die43, Thm 1] *Les groupes $G/[G,G]$ et $D^\times/[D^\times, D^\times]$ sont isomorphes. On appelle* déterminant de G *le morphisme de groupe* $\det_D : G/[G,G] \to D^\times/[D^\times, D^\times]$. *Par définition, il vérifie la propriété universelle classique : il factorise tout morphisme de groupe de G vers un groupe abélien quelconque.*

Rappelons la définition de la trace et de la norme réduite pour les algèbres centrales simples. Soit A une algèbre centrale simple sur un corps (commutatif) F. Sa dimension $[A : F] = d^2$ est un carré et on appelle l'entier naturel d le *degré* de A sur F. La norme réduite et la trace réduite sont définis à l'aide des coefficients du polynôme caractéristique sur n'importe quel corps de déploiement, rendons cet énoncé plus explicite. Soit K une corps de déploiement pour A, alors on définit pour $x \in D$ le polynôme caractéristique de $x \otimes_F 1 \in A \otimes_D K$ comme $\det_K(X\ \mathrm{Id} - x \otimes_F 1) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0 \in F[X]$. Alors la *trace réduite* est $\mathrm{Trd}_A(x) = -a_{d-1}$, et la *norme réduite* est $\mathrm{Nrd}_A(x) = (-1)^d a_0$. On note A^0 le noyau de la trace réduite et A^1 le noyau de la norme. Si A est scindé, on obtient simplement la norme (déterminant) et la trace usuelles sur $M_d(F)$.

Proposition 2.2.0.23. [Vig06, Prop. 1.3.5] *On suppose que F n'est pas de caractéristique* 2 *et que D/F est un corps de quaternions – donc $d = 2$. Alors $D^1 = [D^\times, D^\times]$.*

Définition 2.2.0.24. Pour unifier toutes les notations par la suite, on désigne par $N_{D/F} : G \to F^\times$ le caractère :
— $\mathrm{Nrd}_D \circ \det_D$ si D est un corps de quaternions sur F ou $D = F$ est un corps commutatif ;
— $N_{E/F} \circ \det_E$ si $D = E$ est une extension quadratique de F, $N_{E/F}$ étant la norme associée.

Remarque 2.2.0.25. On prendra garde au fait que, dans le cas d'un corps de quaternions, si $d \in D$, la quantité $\det_F(d)$ désigne généralement – par abus de notation ! – le déterminant du F-endomorphisme d obtenu par oubli de structure : $D^\times \to \mathrm{GL}_4(F) \overset{\det_F}{\to} F^\times$. Avec cette convention, on a la relation $\det_F = N_{D/F}^2$. Alors que dans le cas où $D = E$ est une extension quadratique de F, on a $\det_F = N_{D/F}$. Et bien évidemment, $N_{D/F} = \det_F$ si $D = F$.

Modules des sous-groupes paraboliques. Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non-archimédien F de caractéristique résiduelle p, c'est-à-dire les éléments de G sont les points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. Soit $P = MN$ un parabolique de G. On a une formule pour calculer le module de d'un parabolique [Ren09, V.5.4.] qui est ici encore valable :

Proposition 2.2.0.26. *Soit R un corps de caractéristique différente de p. Alors, pour tout $a \in M$:*

$$\delta_P(a) = \delta_N(a) = \prod_{\gamma \in \Sigma(P)} |\gamma(a)^{-m_\gamma - 2m_{2\gamma}}|_F$$

où $\Sigma(P)$ est le système des racines positives réduites de P (définies sur F) et m_γ la multiplicité de γ en tant que racine.

Démonstration. Il s'agit de justifier que ceci est encore vrai dans R par un argument de réduction. Dans le Corollaire 1.1.1.5, le module $\delta_P(\sigma)$ apparaît à la fois comme un élément de R, et comme l'image dans le corps premier de R d'une quantité rationnelle $[\sigma(K) : K] \in \mathbb{Q}$. L'égalité est encore valable dans R puisque chaque terme qui intervient est une puissance de p et a donc une image bien définie dans le corps premier de R. □

Ici, nous rencontrons un premier problème : il n'y *a priori* aucune garantie que le groupe $U(W)$ msoit un groupe réductif connexe. Cependant :

Proposition 2.2.0.27 ([MVW87, Chap. 1, III.1])**.** *Soit W un espace ε-hermitien sur (D, τ). Le groupe $U(W)$ est un groupe réductif connexe sur F sauf si W est orthogonal. Auquel cas $SU(W) = SO(W)$ est un groupe réductif connexe d'indice 2 dans $U(W) = O(W)$.*

Il faut donc prêter plus attention au calcul du module dans le cas orthogonal. Soit W un espace orthogonal sur $D = F$. Si l'on note $SP(\Phi)$ le stabilisateur dans $SU(W)$ d'un drapeau totalement isotrope Φ, alors on a $SP(\Phi)$ est d'indice au plus 2 dans $P(\Phi)$. De plus, il existe des éléments d'ordre 2 dans $U(W) \backslash SU(W)$. Par exemple, on choisit une base orthogonale, on inverse le signe d'un seul élément de cette base :

$$u = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On procède de même pour $P(\Phi) \backslash SP(\Phi)$ si cet ensemble n'est pas vide. On en déduit que $\delta_P = \delta_{SP}$ car SP est d'indice fini, donc ouvert dans P. Et $\delta_{SP}(u) = 1$ car u est d'ordre fini. Donc la formule pour le calcul du module reste valable.

Nous donnons les valeurs du module pour des paraboliques maximaux dans les cas les plus souvent rencontrés. W désigne un espace ε-hermitien de dimension n sur (D, τ), d'indice de Witt m. Soit X un sous-espace totalement isotrope de W de dimension

$\dim_D X = k$ et $W = X + W^0 + X^*$ une décomposition de W. Soit $P(X) = M(X)N(X)$ une décomposition de Levi. On a un isomorphisme naturel $M(X) \simeq \mathrm{GL}_D(X) \times U(W^0)$. Pour $a = (\alpha, u) \in M(X)$, on note par abus de notation $N_{D/F}(a)$ au lieu de $N_{D/F}(\alpha)$.

Proposition 2.2.0.28. *Le module de $P(X)$ est :*
[$D = F$] $\delta_N(a) = N_{D/F}(a)^{n-k-\varepsilon}$
[$D = E$] $\delta_N(a) = N_{D/F}(a)^{n-k}$
[D quat.] $\delta_N(a) = N_{D/F}(a)^{2n-2k+\varepsilon}$
On résume ceci en une seule formule en prenant $\eta = \varepsilon, 0, -\frac{\varepsilon}{2}$ et en posant $\det_X(a) = \det_F(\alpha) \in F^\times$ *:*

$$\delta_N(a) = |\det_X(a)|^{n-k-\eta}.$$

Démonstration. On peut bien évidemment utiliser la formule de la Proposition 2.2.0.26 en procédant pour les différents systèmes de racines qui apparaissent. On choisit de procéder plutôt par un calcul brut car cela se révèle plus instructif quant à la forme de ces paraboliques.

On a :

$$\delta_P(a) = \delta_N(a) = |\det_X(a)|^{n-2k}\delta_{N_1}(a).$$

Il reste à calculer l'action sur N_1. Pour ce faire, rappelons que :

$$N_1 \simeq \mathcal{A} = \{s \in \mathrm{Hom}(X, X^*) \mid s^* = -s\}.$$

Dans ce cas, en notant $I_0 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ la matrice carré de taille k avec seulement des 1 sur l'antidiagonale, on a :

$$\mathcal{A} \simeq \{s \in s_k(D) \mid s = -\tau(\varepsilon) I_0{}^t\tau(s) I_0\}$$

où $s = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{k,1} & \dots & s_{k,k} \end{bmatrix} \mapsto I_0 s I_0 = \begin{bmatrix} s_{k,k} & \dots & s_{k,1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{1,k} & \dots & s_{1,1} \end{bmatrix}$ donc $I_0{}^t s I_0$ est la transposée vis-à-vis de l'antidiagonale. Les éléments antidiagonaux vérifient donc $s_{i,k+1-i} = -\tau(\varepsilon)\tau(s_{i,k+1-i})$ *i.e.* $s_{i,k+1-i} \in \ker(s \mapsto s + \tau(\varepsilon s))$. Ensuite, il n'y a aucun condition sur la moitié supérieure gauche : on a simplement $s_{k+1-j,k+1-i} = -\tau(\varepsilon)\tau(s_{i,j})$.

[$D = F$, $\varepsilon = -1$ et n pair] on a $U(W) = \mathrm{Sp}_{2m}(F)$ et $\delta_{N_1}(a) = |\det_X(a)|^{(k-1)+2} = |\det_X(a)|^{k+1}$;
[$D = F$, $\varepsilon = 1$] on a $U(W) = O_n(F)$ et $\delta_{N_1}(a) = |\det_X(a)|^{(k-1)+0} = |\det_X(a)|^{k-1}$;
[$D = E$] on a $\delta_{N_1}(a) = |\det_X(a)|^{(k-1)+1} = |\det_X(a)|^k$;
[D quaternions, $\varepsilon = 1$] on a $\delta_{N_1}(a) = |\det_X(a)|^{(k-1)} N_{D/F}(a)^3 = |N_{D/F}(a)|^{2k+1}$;
[D quaternions, $\varepsilon = -1$] on a $\delta_{N_1}(a) = |\det_X(a)|^{(k-1)} N_{D/F}(a) = |N_{D/F}(a)|^{2k-1}$.

□

2.3 Paires duales

Produit tensoriel d'espaces ε-hermitiens. Soit W un D-espace à droite ε-hermitien de dimension finie. On dit que $W = W_1 \otimes_{D_1} W_2$ est un *produit tensoriel hermitien* si : D_1

est un corps dont le centre contient celui de D ; W_1 est un espace vectoriel à droite sur D_1 ; W_2 est un espace vectoriel à gauche sur D_1 et à droite sur D ; les algèbres associés $\mathrm{End}_{D_1}(W_1)$ et $\mathrm{End}_{(D_1,D)}(W_2)$ sont stables sous l'involution adjointe (héritée du produit ε-hermitien !) de $\mathrm{End}_D(W)$. On peut voir W_1 comme un espace vectoriel ε_1-hermitien à droite sur D_1, et W_2 comme un espace vectoriel à droite sur un corps D_2 que l'on ne décrit pas ici. Pour plus de détail, [MVW87, Chap. 1, I.16].

Paires duales [MVW87, Chap. 1, I.17–I.20]. Soit G un groupe. Un *sous-groupe de Howe de* G est un sous-groupe de G égal à son double commutant. Une *paire duale de* G est une paire (H, H') où H est un sous-groupe de Howe et $H' = Z_G(H)$ est le commutant de H. Bien évidemment, un produit de paires duales est une paire duale pour le groupe-produit. Une *paire duale balançoire de* G est un couple de paires duales (H, H') et (K, K') si $H \subset K$ et $K' \subset H$. On le représente grâce au dessin suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & H' \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ H & K' \end{tikzcd}$$

Soit W un D-espace à droite ε-hermitien de type 1 ou 2. Une paire duale (H, H') de $U(W)$ est dite *réductive* si H et H' sont réductives, et si W est semi-simple en tant que $D[H]$-module, ainsi qu'en tant que $D[H']$-module. Elle est dite *irréductible* s'il n'existe pas de décomposition orthogonale de W stable par $D[H \times H]$.

Proposition 2.3.0.29 ([MVW87, Chap. 1, I.19])**.** *Toute paire réductive duale de* $U(W)$ *est produit de paires duales réductives irréductibles. Les paires duales réductives irréductibles sont de la forme :*

- $(U(W_1), U(W_2))$ *pour toute décomposition de* W *en produit tensoriel hermitien* $W = W_1 \otimes_{D'} W_2$ *(sauf si un des facteurs est orthogonal hyperbolique de dimension* 2 *sur* $D' = \mathbb{F}_3$ *ou anti-hermitien de dimension* 1 *sur un corps de quaternions* D' *avec* $D = F$*) ;*
- $(GL_{D_1}(X_1), GL_{D_2}(X_2))$ *si* W *est scindé de type 1, et* $X = X_1 \otimes_{D'} X_2$ *est une décomposition d'un lagrangien* X *de* W*.*

Le cas qui nous intéresse le plus dans ce manuscrit est quand W est un espace symplectique de dimension $2n$ sur F. Il suffit donc de chercher les décompositions de W en produit tensoriel hermitien. Soit $t_{D/F} \in \mathrm{Hom}_F(D, F)$ tel que la forme bilinéaire $(d, d') \mapsto t_{D/F}(dd')$ soit non-dégénérée sur D (penser à un multiple de la trace réduite dans la majorité des cas).

Lemme 2.3.0.30 ([MVW87, Chap. 1, I.20])**.** *Soient* $(W_1, <,>_1)$ *est un espace* ε_1*-hermitien à droite sur* D *et* $(W_2, <,>_2)$ *est* ε_2*-hermitien à gauche sur* D*, avec* $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$*. Alors le produit tensoriel* $W = W_1 \otimes_D W_2$ *muni de la forme :*

$$<< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' >>= t_{D/F}(< w_1, w_1' >_1 \tau(< w_2, w_2' >_2))$$

est un espace symplectique. Inversement, toute décomposition de W *en produit tensoriel hermitien est de ce type.*

Définition 2.3.0.31 ([MVW87, Chap. 1, I.20])**.** Pour tout espace $(W, <,>)$ anti-hermitien sur (D, τ), l'espace $(W, t_{D/F}(<,>))$ est symplectique sur F, on dit qu'il est « déduit par restriction des scalaires » de $(W, <,>)$ et $t_{D/F}$. Une paire duale dans $U(W_D)$ différente de $(\{\pm 1\}, U(W_D)))$ devient une paire duale de $\mathrm{Sp}(W_F)$ par restriction des scalaires.

On connaît la liste des paires duales irréductibles de $\mathrm{Sp}(2n, F)$ qui ne proviennent pas par restriction des scalaires de $\mathrm{Sp}(2n', F')$ où F' est une extension de F telle que $[F' : F]n' = n$. Elles sont de deux types. On pose $d = [D : F]$:

[type 2] $(\mathrm{GL}(m, D), \mathrm{GL}(m', D))$, D corps de centre F, $n = mm'[D : F]$;

[type 1, symplectique-orthogonale] $(O(m, F), \mathrm{Sp}(2m', F))$ avec $n = mm'$ et $O(m, F') \neq O(2, \mathbb{F}_3)$;

[type 1, unitaires] $(U^+(m, D), U^-(m', D))$ avec $2n = mm'd$, $U^\pm(k, D)$ est le groupe des isométries d'une forme $\pm$-hermitienne à k variables sur D, et D'/F une extension quadratique ou un corps de quaternions avec $m' \neq 1$ muni de l'involution canonique.

On reproduit la description de [Kud96, II.1] qui permettent de rendre ces cas beaucoup plus clairs et explicites, dans le cas des paires ne provenant pas de restriction des scalaires.

Paires de type I. Soit (D, τ) une F-algèbre munie d'une involution qui est : soit (F, Id) ; soit (E, σ) avec E/F quadratique et $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ non-trivial ; soit (D, τ) une algèbre de quaternions de centre F muni de son involution τ. Soient $(W_1, <,>_1)$ et $(W_2, <,>_2)$ deux D-espaces vectoriels ε_1 et ε_2-hermitien, avec $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$. On peut identifier de manière canonique l'espace vectoriel à gauche $W_2^* = \mathrm{Hom}_D(W_2, D)$ et W_2 vu comme D-espace vectoriel à gauche (canonique elle aussi) : $d \times w_2 = w_2\tau(d)$. Cet isomorphisme est explicite, et il est le suivant : $w_2 \mapsto (\phi_{w_2} : w_2' \mapsto < w_2, w_2' >_2)$. On notera toujours $U(W_2)$ le groupe des isométries de W_2 comme D-espace vectoriel à droite, mais il est facile de remarquer que, pour la structure d'espace vectoriel à gauche, ces groupes d'isométries sont en réalité canoniquement isomorphes. Le F-espace vectoriel $W = W_1 \otimes_D W_2$ est alors symplectique pour la forme $<<,>>$ précédente associée à $t_{D/F}$. Le morphisme canonique :

$$\begin{array}{rcccc} i & : & U(W_1) \times U(W_2) & \to & \mathrm{Sp}(W) \\ & & (g, h) & \mapsto & g \otimes h \end{array}$$

induit un isomorphisme entre $U(W_1)$ et $i(U(W_1) \times 1)$. De même pour $U(W_2)$. On confondra dorénavant $U(W_1)$ et $U(W_2)$ avec leurs images dans $\mathrm{Sp}(W)$ par i.

Pour plus de clarté dans les énoncés, il sera fait référence à la classification suivante dorénavant :

D	commutatif $D = E$		non commutatif $E = F$
(E, F)	$E = F$	E/F quad.	D/F quat.
$(U(W_1), U(W_2))$	$(\mathrm{Sp}(W_1), O(W_2))$ ou $(O(W_1), \mathrm{Sp}(W_2))$	$(U(W_1), U(W_2))$	$(U(W_1), U(W_2))$
Paires duales de type I	symplectique-orthogonale	unitaires	unitaires quaternioniques
	commutatives		non commutatives

TABLE 2.3 – Paires duales de type I.

Paires de type II. Soit D une algèbre à division de centre F. Soient A et B deux D-espaces vectoriels à droite de dimension finie sur D. On pose $A^* = \mathrm{Hom}_D(A, D)$ où D est un D-espace vectoriel à droite sur lui-même. A^* est alors un D-espace vectoriel à gauche, dont l'action sur un élément $a^* \in A^*$ est $d.a^* : a \mapsto d.[a^*, a]$ où $[,] : A^* \times A \to D$ est le couplage canonique de A et A^*. Pour tout $h \in \mathrm{End}_D(A)$, on note h^* l'adjoint de h vis-à-vis de $[,]$. Soit maintenant $X = A \otimes_D B^*$ et $Y = B \otimes_D A^*$, on a un couplage non-dégénéré :

$$\begin{array}{rccc} [,] : & X \times Y & \to & F \\ & (a \otimes b^*, b \otimes a^*) & \mapsto & t_{D/F}([a^*, a][b^*, b]) \end{array}$$

où $t \in \mathrm{Hom}(D, F)$ sera la trace réduite de D/F en général. Le F-espace vectoriel $W = X+Y$ est alors un espace symplectique pour la forme $<< x_1 + y_1, x_2 + y_2 >>= [x_1, y_1] - [y_1, x_2]$. Il y a un morphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_D(A) \times \mathrm{GL}_D(B) & \to & \mathrm{Sp}(W) \\ (g, h) & \mapsto & g \otimes (h^*)^{-1} + h \otimes (g^*)^{-1} \end{array}$$

Remarque 2.3.0.32. On peut éviter le recours aux espaces vectoriels à gauche, ou à la dualité, en disant qu'un D-espace à droite s'identifie canoniquement à un D-espace à gauche via $d \times v = v\tau(d)$. Il faudra cependant faire attention avec les représentations matricielles car le plongement dépend de ces conventions.

2.4 Invariant de Leray généralisé et fonction $x(g)$ à la Rao

Ces deux notions ont été exploitées pour le groupe symplectique dans [RR93] afin de donner une expression explicite du 2-cocyle associé au groupe métaplectique de la Définition 1.3.0.12. Ensuite, la définition de l'invariant de Leray a été généralisée dans [Kud94] à tout espace ε-hermitien dans le but de comprendre la restriction de ce 2-cocyle à certains sous-groupes du groupe métaplectique. On suit la convention en « $-\varepsilon$ » qui est celle de [Kud94, 1.], de sorte que l'invariant de Leray sera un espace ε-hermitien.

L'invariant de Leray généralisé. Soit $(W, <,>)$ un espace $(-\varepsilon)$-hermitien scindé sur une algèbre à division D. Le groupe des isométries $G = U(W)$ de W agit sur les triplets de lagrangien $(X_1, X_2, X_3) \in \Omega(W)$ via l'action canonique de G sur W. On peut attacher un espace ε-hermitien $L_D(X_1, X_2, X_3)$ à tout triplet de sorte que deux triplets (X_1, X_2, X_3) et (X_1', X_2', X_3') sont dans la même orbite sous l'action de G si et seulement si les espaces $L_D(X_1, X_2, X_3)$ et $L_D(X_1', X_2', X_3')$ sont isométriques.

Soit donc (X_1, X_2, X_3) un triplet de lagrangien de W. On reprend le développement exposé dans [Kud94], qui est une généralisation des résultats de [RR93]. Il existe un élément $u \in N(X_1)$ tel que $u(X_2) = X_3$ si et seulement si $X_2 \cap X_1 = X_3 \cap X_1$. De plus, cet élément est unique si et seulement si X_2 et X_3 sont transverses à X_1 *i.e.* $X_2 \cap X_3 = X_3 \cap X_1 = \{0\}$.

Dans un premier temps, supposons que X_1, X_2 et X_3 sont transverses deux-à-deux. Dans la base $X_1 \oplus X_2$, cet élément $u \in N(X_1)$ est de la forme :

$$u = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{X_1} & \rho \\ 0 & \mathrm{Id}_{X_2} \end{bmatrix}$$

où $\rho \in \mathrm{Hom}(X_2, X_1)$. On peut aussi l'interpréter de cette manière : si l'on note $\mathrm{Id}_W = \pi_1 \oplus \pi_3$ la décomposition en projecteur vis-à-vis de $X_1 \oplus X_3$, alors $u : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + \pi_3(x_2) = x_1 + x_2 - \pi_1(x_2)$. D'où $\rho = -\pi_1$ sur X_2. On pose alors $L_D(X_1, X_2, X_3) = X_2$, et pour tout $x, y \in L_D$, on définit $(x, y)_{L_D} =< x, uy >=< x, \rho y >$. C'est un espace ε-hermitien, et deux tels espaces $L_D(X_1, X_2, X_3)$ et $L_D(X_1', X_2', X_3')$ sont isométriques si et seulement les deux triplets sont dans la même orbite sous l'action de G [Kud94, 1.1].

Dans un second temps, on étend ces définitions au cas où (X_1, X_2, X_3) ne sont pas deux-à-deux transverses. Soit $M = X_1 \cap X_2 + X_2 \cap X_3 + X_3 \cap X_1$ et $M^\perp$ son orthogonal dans W. On pose $W_M = M^\perp/M$ et $X_{i,M}$ les images des $X_i \cap M^\perp$ dans W_M. On définit alors :

Définition 2.4.0.33. On appelle invariant de Leray associé à (X_1, X_2, X_3) l'espace ε-hermitien de dimension $l = \frac{1}{2}(\dim_D W - \dim_D M)$:

$$L_D(X_1, X_2, X_3) = L_D(X_{1,M}, X_{2,M}, X_{3,M}).$$

Remarque 2.4.0.34. De plus, il est prouvé, à l'aide du [Kud94, Lem. 1.2] dit de la décomposition en 5 à la Rao, qu'on a une bijection entre les orbites des triplets lagrangiens sous l'action de $U(W)$ et les classes d'isométrie de tels espaces L_D construits.

Les fonctions $x(g)$ à la Rao. Soit $(W, <,>)$ un espace $(-\varepsilon)$-hermitien scindé sur une algèbre à division D. On note $n = \frac{1}{2}\dim_D W$. Alors le choix d'une base orthogonale adaptée pour $<,>$ donne lieu à une isométrie entre $(W, <,>)$ et $(D^{2n}, <,>)$ tel que pour tout $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D^{2n}$:

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1 . {}^t y_2^\tau - \varepsilon y_1 . {}^t x_2^\tau$$

pour lequel $D^{2n} = X + Y$, où $X = \{(x, 0) \mid x \in D^n\}$ et $Y = \{(0, y) \mid y \in D^n\}$ sont deux lagrangiens de D^{2n} mis en dualité par $<,>$. On choisit donc une base hermitienne $e_1, \ldots, e_n, e'_1, \ldots, e'_n$ de W qui réalise l'isométrie $W \simeq D^{2n}$ de sorte que X soit engendré par $e_1, \ldots, e_n$ et Y par $e'_1, \ldots, e'_n$. On définit $\tau \in G$ par $\tau e_i = -\varepsilon e'_i$ et $\tau e'_i = e_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a la relation $\tau^2 = -\varepsilon$ Id. Pour tout sous-ensemble $S \subset \{1, \ldots, n\}$, on définit W_S comme le sous-espace de W engendré par $\{e_i, e'_i\}_{i \in S}$. Le complémentaire de S est noté $\bar{S}$, alors on a une somme orthogonale $W = W_S + W_{\bar{S}}$. De même pour X et Y. On définit $\tau_S \in G$ par $\tau_S = \tau|_{W_S} \oplus \mathrm{Id}_{W_{\bar{S}}}$ pour la décomposition orthogonale $W = W_S + W_{\bar{S}}$. On a de plus la décomposition en doubles classes modulo $P = P(X)$:

$$G = \bigsqcup_{j=0}^{n} P \tau_j P$$

où $\tau_j = \tau_{\{1, \ldots, j\}}$ et $P \tau_S P = P \tau_j P$ si et seulement si $j = |S|$. Un élément $g \in G$ de la forme :

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dans la base $W = X + Y$ est dans $P \tau_{j(g)} P$, où $j(g) = n - \dim_D \ker(c)$ et $\ker(c) = X \cap (g^{-1} X)$. La [Kud94, Prop. 1.3] inspirée de l'article de Rao est alors :

Proposition 2.4.0.35. *Soient $g_1, g_2 \in G$, il existe des éléments $p, p_1, p_2 \in P$ tels que :*

$$g_1 = p_1 \kappa_1 p^{-1} \text{ et } g_2 = p \kappa_2 p_2$$

avec :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{W_0}, \tau_{W_1}, \mathrm{Id}_{W_2}, \tau_{W_3}, \tau_{W_4} n(\rho)) \\ \kappa_2 &= \mathrm{diag}(\mathrm{Id}_{W_0}, \tau_{W_1}, \tau_{W_2}, \mathrm{Id}_{W_3}, \tau_{W_4}) \end{aligned}$$

où chaque bloc dans κ_i provient du [Kud94, Lem. 1.2]*, dit de la décomposition en 5 termes à la Rao $W = W_0 + W_1 + \cdots + W_4$ associé au triplet $(X, g_2 X, g_1^{-1} X)$, qui met en jeu une partition $S_0 \sqcup \cdots \sqcup S_4$ de $\{1, \ldots, n\}$. Enfin, l'élément $\rho = \varepsilon \rho^\tau$ est une matrice ε-hermitienne non-dégénérée dans la classe d'isométrie de $L_D(X, g_2 X, g_1^{-1} X)$ et $n(\rho) = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{X_4} & \rho \\ 0 & \mathrm{Id}_{Y_4} \end{bmatrix}$ dans la base canonique de $W_4 = X_4 + Y_4$.*

Soit $\nu = \mathrm{Nrd}_D \circ \det_D$. C'est la composée $\mathrm{Nrd}_D \circ \det_D$ dans le cas quaternionique, et simplement le déterminant sur D dans le cas commutatif.

Remarque 2.4.0.36. Quand $D = E$ est une extension quadratique de F, le caractère ν est différent du caractère $N_{D/F}$ introduit dans la Définition 2.2.0.24. En effet, $\nu = \det_E$ est à valeurs dans $E^\times$ alors que $N_{D/F} = N_{E/F} \circ \det_E$ est à valeurs dans $F^\times$.

Le [Kud94, Lem. 1.4] assure alors que la définition suivante est consistante :

Proposition 2.4.0.37 ([Kud94, Cor. 1.5])**.** *Soit $g \in G$ tel $g = p_1 \tau_S p_2 \in P\tau_S P$, alors la quantité :*

$$x(g) = \nu(p_1 p_2|_X)$$

est bien définie dans $E^\times/NE^\times$ si D/F est une extension quadratique, et dans $F^\times/F^{\times 2}$ si $D = F$ ou D/F est un corps de quaternion.

Pour terminer, voici une relation qui sera utile dans la suite :

Proposition 2.4.0.38 ([Kud94, Prop. 1.6])**.** *Soit $g_1, g_2 \in G$ et $\rho = L_D(X, g_2X, g_1^{-1}X)$ l'invariant de Leray associé. On pose $l = \dim_D \rho$ et t définit par la relation $2t = j(g_1) + j(g_2) - j(g_1g_2) - l$. Alors :*

$$x(g_1g_2) = x(g_1)x(g_2)(-\varepsilon)^t \nu(\rho).$$

2.5 Involution MVW

Soit F un corps soit fini, soit local non archimédien. Soit E une extension quadratique de F ou F lui-même. On note τ le générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Soit W un espace ε-hermitien sur E, avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. D'après [MVW87, Chap 4. I.2], il existe un élément δ de $\mathrm{GL}_F(W)$, τ-linéaire (*i.e.* $g(\lambda w) = \tau(\lambda) g(w)$ pour tout $\lambda \in E$ et $w \in W$) et tel que :

$$< \delta w, \delta w' > = < w', w >$$

pour tous $w, w' \in W$. Pour $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_R(U(W))$, on définit la représentation $\pi^\delta \in \mathrm{Rep}_R(U(W))$ par $\pi^\delta(x) = \pi(\delta x \delta^{-1})$ pour tout $x \in U(W)$. Ce résultat généralise [MVW87, Chap. 4 Th. II.1] au cas modulaire.

Théorème 2.5.0.39. *Soit R un corps. On suppose qu'il existe un compact ouvert de $U(W)$ dont le pro-ordre est inversible dans R. Alors, pour toute représentation irréductible admissible π de $U(W)$ à coefficients dans R, les représentations π^δ et $\pi^\vee$ sont isomorphes.*

Démonstration. En vertu du Théorème 1.1.3.7, ceci est équivalent à prouver que $\mathrm{tr}_{\pi^\delta} = \mathrm{tr}_{\pi^\vee}$ en tant que distribution sur $C_c^\infty(U(W))$. Comme $U(W)$ est unimodulaire et que $\delta : x \mapsto \delta x \delta^{-1}$ est de carré la conjugaison par $\delta^2 \in U(W)$, on a pour tout $f \in C_c^\infty(U(W))$:

$$\mathrm{tr}_{\pi^\delta}(f) = \mathrm{tr}_\pi(f^\delta) \text{ et } \mathrm{tr}_{\pi^\vee}(f) = \mathrm{tr}_\pi(f^{-1})$$

où $f^{-1} : x \mapsto f(x^{-1})$ et $f^\delta : x \mapsto f(\delta x \delta^{-1})$. Cela revient donc à prouver que :

$$\mathrm{tr}_\pi(f) = \mathrm{tr}_\pi(f^\sigma)$$

où $\sigma : x \in G \mapsto \delta x^{-1} \delta^{-1} \in G$ est un homéomorphisme qui est aussi un anti-automorphisme. Pour montrer que la distribution trace est invariante par σ, on utilise le Théorème 1.1.3.8. En effet, il reste seulement à justifier que l'action par conjugaison de $U(W)$ sur lui-même est constructible, ce qui est vrai car elle provient d'une action algébrique, et que σ préserve les classes de conjugaison, ce qui est prouvé dans [MVW87, Chap. 4 Prop. I.2]. $\square$

Quand $U(W)$ est le groupe symplectique, un tel élément δ est un élément de $\mathrm{GSp}(W)$ de facteur de similitude -1. On a un résultat similaire pour le groupe métaplectique réduit.

Théorème 2.5.0.40. *Soit R un corps. On suppose qu'il existe un compact ouvert de $U(W)$ dont le pro-ordre est inversible dans R. Alors, pour toute représentation irréductible admissible π de $\widehat{Sp}(W)$ à coefficients dans R, les représentations π^δ et $\pi^\vee$ sont isomorphes.*

Démonstration. Il s'agit d'appliquer à nouveau le Théorème 1.1.3.8 avec $\sigma(x) = \delta x^{-1} \delta$ où la conjugaison par δ a bien un sens dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ d'après [MVW87, Chap. 4 I.8] (on prouve également ce fait lors du dernier point de la Proposition 4.3.0.7). Il s'agit principalement de justifier deux choses : l'action du groupe métaplectique sur lui-même par conjugaison est une action constructible ; l'anti-automorphisme σ préserve les classes de conjugaison.

La constructibilité vient du fait qu'une $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$-orbite est toujours réunion de deux copies identiques de $\mathrm{Sp}(W)$-orbite. En effet, si l'on note $p : \widehat{\mathrm{Sp}}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ la projection, alors pour toute orbite o dans $\mathrm{Sp}(W)$ pour l'action par conjugaison, l'ensemble $p^{-1}(o)$ est évidemment stable par conjugaison et est réunion de deux $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$-orbites chacune homéomorphe à o. On vérifie que $p^{-1}(o)$ est réunion de deux $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$-orbites si et seulement si, pour tout $(u,1) \in \widehat{\mathrm{Sp}}(W)$, l'orbite de $(u,1)$ ne contient pas $(u,-1)$. De plus, $(u,1)$ et $(u,-1)$ sont dans la même orbite si et seulement s'il existe un élément z dans le centralisateur de u tel que $(z,1)(u,1)(z,1)^{-1} = (u,-1)$. Or, le Lemme 4.2.2.3 montre que $(z,1)$ et $(u,1)$ commute dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Donc $(u,1)$ et $(u,-1)$ appartiennent à deux $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$-orbites distinctes.

La préservation des classes de conjugaison se prouve comme dans [MVW87, Chap. 4 Prop. I.8], bien que leur proposition ne concerne que les classes de conjugaison semi-simples régulières. On réemploie leurs notations et on procède par récurrence pour prouver le résultat en général. On montre l'hérédité, l'initialisation provenant des calculs explicites dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ pour W de dimension 2 *i.e.* l'unique extension centrale non triviale de $\mathrm{SL}_2(F)$ par $\{\pm 1\}$. Soit $g \in \mathrm{Sp}(W)$ où W est de dimension $2m$. Soit P son polynôme minimal. Comme dans [MVW87, Chap. 4 I.3], on décompose $W = \oplus_{i \in I} W_i$. Il n'y a que deux cas dans lesquels on ne peut pas appliquer l'hypothèse de récurrence : quand le polynôme minimal P est de la forme $(X \pm 1)^{2m}$; quand le polynôme minimal est de la forme $(X-\lambda)^m (X - \lambda^{-1})^m$. Dans tous les autres cas, on peut se ramener à l'hypothèse de récurrence, soit en décomposant W en une somme orthogonale stable, soit en considérant W comme un espace symplectique sur une extension finie de F. On vérifie dans chacun de ces deux cas, en utilisant les modèles explicites et l'expression du cocycle métaplectique, que $\delta x \delta^{-1}$ est bien conjugué à x^{-1} dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$.

□

2.6 Groupes « classiques »

On introduit les notations $\times$ et $\rtimes$ pour l'induite parabolique de GL_n et de groupes d'isométries comme les groupes orthogonaux, symplectiques, et unitaires.

Notation $\times$ de Bernstein-Zelevinsky. Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit comme parabolique minimal de $\mathrm{GL}_n(F)$ le sous-groupe de Borel B_n des matrices triangulaires supérieures. Les sous-groupes de Levi standards sont donnés par les partitions de l'entier n et sont donc de la forme $\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(F)$ où $n_1 + \cdots + n_r = n$. Soient deux représentations $\pi_1 \in$

$\mathrm{Rep}_R(\mathrm{GL}_{n_1}(F))$ et $\pi_2 \in \mathrm{Rep}_R(\mathrm{GL}_{n_2}(F))$. On adopte les notations de Bernstein-Zelevinsky où P_{n_1,n_2} est le parabolique standard de $\mathrm{GL}_{n_1+n_2}(F)$ de Levi $\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \mathrm{GL}_{n_2}(F)$:

$$\pi_1 \times \pi_2 = \mathrm{Ind}_{P_{(n_1,n_2)}}^{\mathrm{GL}_{n_1+n_2}(F)}(\pi_1 \otimes \pi_2) \in \mathrm{Rep}_R(\mathrm{GL}_{n_1+n_2}(F)).$$

Le produit que l'on vient de définir est associatif, on peut donc généraliser cette définition à une famille de r représentations. Soient $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ une suite d'entiers positifs, dont on note α la partition de $n = n_1 + \cdots + n_r$ associée. Soient $(\pi_1, \dots, \pi_r)$ des représentations de chaque facteur $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ et P_α le parabolique standard de $\mathrm{GL}_n(F)$ de Levi $M_\alpha = \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(F)$, alors :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r = \mathrm{Ind}_{P_\alpha}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r).$$

Notation $\rtimes$ de Tadic. On adopte ensuite les notations de Tadic pour les groupes d'isométrie. Soit W un espace ε-hermitien avec $D = E$ une extension quadratique de F ou bien F lui-même. Alors la donnée d'un drapeau complet totalement isotrope fixe un choix de tore maximal déployé et de parabolique minimal de $U(W)$. Si l'on note m l'indice de Witt de W et n sa dimension, pour toute suite d'entiers positifs $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ de somme $m_\alpha = m_1 + \cdots + m_r \leq m$, correspond un sous-groupe de Levi standard de la forme :

$$\mathrm{GL}_{m_1}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(E) \times U(W_\alpha)$$

où W_α est un espace ε-hermitien de dimension $n - 2m_\alpha$ qui est déterminé par le drapeau complet totalement isotrope que l'on a choisi. Les deux espaces W et W_α sont dans la même tour de Witt et déterminent en ce sens des groupes d'isométrie du « même type ». Pour une représentation π_1 de $\mathrm{GL}_{n_1}(E)$ et une représentation ρ de $U(W_{(m_1)})$, on note :

$$\pi_1 \rtimes \rho = \mathrm{Ind}_{P_{(n_1)}}^{U(W)}(\pi_1 \otimes \rho)$$

où $P_{(n_1)}$ est le parabolique standard de $U(W)$ de Levi $\mathrm{GL}_{n_1}(E) \times U(W_{(n_1)})$. Ce produit est compatible au produit précédent au sens suivant. Soit $\alpha = (n_1, n_2)$ et π_1, π_2 des représentations de chaque bloc $\mathrm{GL}_{n_i}(E)$, alors :

$$\pi_1 \times (\pi_2 \rtimes \rho) \simeq (\pi_1 \times \pi_2) \rtimes \rho.$$

On notera donc indifféremment pour une famille de r représentations :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r \rtimes \rho,$$

pour signifier l'induite parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r \otimes \rho$ vis-à-vis du parabolique standard de $U(W)$ de Levi $\mathrm{GL}_{m_1}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(E) \times U(W_\alpha)$.

Compatibilité à $(-)^\vee$ et $(-)^{\mathrm{MVW}}$. Comme l'induction parabolique normalisée commute à la contragrédiente, on a $(\pi_1 \times \pi_2)^\vee = \pi_1^\vee \times \pi_2^\vee$ et $(\pi_1 \rtimes \rho)^\vee = \pi_1^\vee \rtimes \rho^\vee$.

On suppose que E est une extension finie de F de degré au plus 2. Soit c un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$. Soit X un espace vectoriel de dimension n sur E. Pour toute représentation π de $\mathrm{GL}(X)$, on définit le c-conjugué de cette représentation ${}^c\pi$ de π de la manière suivante. Le choix d'une base a de X détermine un isomorphisme $a : \mathrm{GL}(X) \cong \mathrm{GL}_n(E)$. L'action naturelle de c à droite se transporte en une action à gauche que l'on écrit $c.g = a \circ c \circ a^{-1}(g)$ pour $g \in \mathrm{GL}(X)$. On définit alors pour $g \in \mathrm{GL}(X)$:

$$({}^c\pi)(g) := \pi(c.g).$$

Cette définition dépend bien évidemment du choix de base a que l'on s'est donné car l'action de c sur $\mathrm{GL}(X)$ en dépend. Cependant, tout autre choix de base revient diffère de la représentation ${}^c\pi$ par un automorphisme intérieur de X, et donc la classe d'isomorphisme de ${}^c\pi$ est bien déterminée et indépendante du choix de base. Bien évidemment, si $E = F$ on a simplement ${}^c\pi = \pi$. On a alors une formule pour relier les notations de Tadic avec l'action de l'involution MVW :

$$(\pi \rtimes \rho)^{\mathrm{MVW}} = {}^c\pi \rtimes \rho^{\mathrm{MVW}}.$$

Lemme géométrique explicite à la Tadic. On peut interpréter le lemme géométrique dans le cas où les paraboliques qui interviennent sont des paraboliques maximaux de groupes d'isométrie. Cette idée a d'abord été explicitée par Tadic [Tad95] pour les groupes $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ et $SO_{2n+1}(F)$. Puis ils ont été étendu à d'autres groupes, le plus problématique étant le groupe orthogonal scindé en dimension impaire [Ban99]. Les rappels suivants [MT02, 1.] sont ceux de l'article de Moeglin et Tadic.

On note :

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}(\mathrm{GL}_n(E)))$$

où $\mathcal{R}(\mathrm{GL}_n(E))$ désigne le groupe de Grothendieck de $\mathrm{GL}_n(E)$. L'opération $\times$ induit une application bilinéaire $R \times R \to R$ qui se factorise par $m : R \otimes R \to R$. De même, on a une comultiplication $m^* : R \to R \otimes R$ qui est donnée par les foncteurs de Jacquet vis-à-vis de paraboliques maximaux [Tad95, 2.]. Ces deux opérations munissent R d'une structure d'algèbre de Hopf.

On fixe une tour de Witt $(W_n)_{n\geq 0}$ de sorte que le premier élément W_0 soit anisotrope. Toutes les formes ε-hermitiennes que l'on considère sont « commutatives » *i.e.* telles que $D = E$. On note $S_n = U(W_n)$ et :

$$R(S) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}(S_n).$$

En fixant pour chaque W_n un drapeau complet totalement isotrope $(X_k^n)_{0 \leq k \leq n}$, on obtient les paraboliques standards maximaux $(P_k^n)_{0 \leq k \leq n}$ vis-à-vis de ce drapeau. Pour une représentation τ de longueur finie de S_n, on définit :

$$\mu^*(\tau) = \sum_{k=0}^{n} [R_k(\tau)]_{\mathrm{ss}}$$

où R_k est la restriction parabolique vis-à-vis du parabolique standard P_k^n. Cette application s'étend additivement en $\mu^* : R(S) \to R \otimes R(S)$. Enfin, $\rtimes$ définit également un morphisme $\rtimes : R \times R(S) \to R(S)$.

Soit $M^* = (m \otimes 1) \circ ({}^\wedge \otimes m^*) \circ s \circ m^* : R \to R \otimes R$ où, ${}^\wedge$ est un morphisme qui envoie une représentation irréductible π sur ${}^c(\pi^\vee)$ et étendu linéairement à R ; s permute les éléments de $R \otimes R$ au sens où le tenseur élémentaire $x \otimes y$ est envoyé sur $y \otimes x$, et on étend linéairement à tout R.

Théorème 2.6.0.41. *Si $\pi \in R$ et $\sigma \in R(S)$, on a :*

$$\mu^*(\pi \rtimes \sigma) = M^*(\pi) \rtimes \mu^*(\sigma).$$

Remarque 2.6.0.42. En particulier, si l'on considère la représentation $\pi \rtimes \sigma = \mathrm{Ind}_{P_k^n}^{S_n}(\pi \otimes \sigma)$ et que l'on veut analyser les constituants donnés par le lemme géométrique pour $R_{k'}(\pi \rtimes \sigma)$, il suffit d'extraire de $\mu^*(\pi \rtimes \sigma)$ les termes qui appartiennent à $\mathcal{R}(\mathrm{GL}_{k'}(E)) \otimes \mathcal{R}(S_{n-k})$.

2.7 Groupe orthogonal et groupe métaplectique

Les résultats précédents se généralisent de manière assez immédiate à d'autres groupes qui sont proches des groupes réductifs connexes sur un corps local non archimédien. Par exemple, et cela suffira dans la suite, les résultats que l'on énonce sont vrais pour les groupes orthogonaux – qui ne sont pas connexes en général – et les extensions centrales de groupes réductifs connexes – en particulier pour le groupe métaplectique, qui est défini plus loin. Excepté pour le groupe orthogonal scindé en dimension paire, les groupes de Weyl sont les mêmes que ceux de leur composante neutre. L'article de Goldberg et Herb [GH97] contient les détails concernant l'unicité du support cuspidal pour les groupes non connexes de quotient abélien fini, et dont on trouve un résumé rapide dans la thèse de Cohen [Coh13]. Cela se généralise à l'identique dans le cas modulaire. Pour les extensions centrales, un parabolique est par définition l'image réciproque d'un parabolique classique. Les définitions et propositions de la présente section se réécrivent sans changement majeur. Le cas du groupe métaplectique est traité en détail par Hanzer et Muic [HM10], en particulier en particulier en généralisant les résultats à la Tadic.

Chapitre 3

Théorème de Stone-von Neumann et représentation métaplectique

Toute la suite imite scrupuleusement le développement de [MVW87, Chap. 2]. Nous allons généraliser le théorème de Stone-von Neumann qui sera dans la section 4 la pierre angulaire pour construire, à partir d'une représentation projective du groupe symplectique, la représentation de Weil. Le cadre est le suivant.

Groupe d'Heisenberg. Soit F un corps qui est soit fini, soit local non archimédien. Le nombre premier p désignera la caractéristique de F dans le premier cas, et la caractéristique résiduelle dans le second. On suppose de plus que la caractéristique de F est différente de 2. Soit W un espace vectoriel de dimension finie (et paire) sur F, muni d'une forme symplectique $< \, , >$.

Définition 3.0.0.43. Le groupe d'Heisenberg $H(W, < \, , \, >)$, noté H dans la suite, est l'ensemble $W \times F$ muni de la topologie produit et de la loi de groupe :

$$(w,t).(w',t') = (w + w', t + t' + \frac{1}{2} < w, w' >).$$

On identifie F avec le centre de H via $t \mapsto (0,t)$.

Remarque 3.0.0.44. L'espace W peut être identifié avec l'ensemble $\{(w,0) \in H \mid w \in W\}$, on prendra garde toutefois : ce n'est pas un sous-groupe de H.

Caractères additifs. Soit R un anneau. On reprend les hypothèses du Corollaire A.1.1.12 :

$$\mu^p(R) = \begin{cases} \{\xi \in R^\times \mid \xi^p = 1\} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si la caractéristique de } F \text{ est positive ;} \\ \{\xi \in R^\times \mid \exists k \in \mathbb{N}, \xi^{p^k} = 1\} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble $\hat{F}_R$ des caractères lisses de F à valeurs dans R est donc muni d'une structure d'espace vectoriel sur F de dimension 1. On rappelle que dans ce cas, on a un isomorphisme entre $\hat{W}_R$ et $W^* = \mathrm{Hom}_F(W,F)$ qui dépend du choix d'un caractère non trivial dans $\hat{F}_R$. Si l'on note ψ un tel caractère, l'isomorphisme associé est $w^* \mapsto (w \mapsto \psi(w^*(w)))$. De plus, on a ici un isomorphisme canonique entre W^* et W, qui est donné par $w \in W \mapsto (w' \mapsto < w, w' >) \in W^*$. On obtient donc un isomorphisme entre $\hat{W}_R$ et W – qui dépend du choix d'un caractère non trivial.

Remarque 3.0.0.45. Quand R est un corps, la condition sur $\mu^p(R)$ impose que la caractéristique de R est différente de p. En particulier, il existe une mesure de Haar de W à valeurs dans R.

Théorème de Stone-von Neumann et représentation métaplectique. Avec les notations précédentes, on a :

Théorème 3.0.0.46. *On suppose que R est un corps (de caractéristique différente de p) tel qu'on ait les hypothèses précédentes sur $\mu^p(R)$. Soit $\psi \in \hat{F}_R$ un caractère additif non-trivial. À isomorphisme près, il existe une unique représentation irréductible (ρ, S) dans $\mathrm{Rep}_R(H)$ telle que, pour tout $t \in F$, $\rho((0,t)) = \psi(t) Id_S$.*

On appellera représentation métaplectique associée à ψ, *toute représentation irréductible qui est dans la classe d'isomorphisme précédente.*

Remarque 3.0.0.47. D'après la Remarque 3.0.0.45, l'hypothèse sur la caractéristique est superflue. On la signale toutefois pour rendre plus explicites les conditions sur R.

3.1 Preuve du théorème

En ce qui concerne la preuve de ce théorème, nous allons d'abord donner de bons candidats qui satisfont aux hypothèses du théorème, et nous montrerons enfin que ce sont les seuls. Une première tentative naïve et brutale serait de proposer l'induite compacte $\natural - \mathrm{ind}_F^H(\psi)$ du caractère ψ comme prétendante. Elle satisfait toutes les hypothèses du théorème, excepté l'irréductibilité. Néanmoins, il existe des induites plus fines qui vérifient ce que nous souhaitons. En effet, nous montrons qu'il existe un sous-groupe fermé $A_H \supset F$ de H et un caractère lisse ψ_A qui étend ψ à A_H tels que $\natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ est irréductible.

3.1.1 Construction de A et ψ_A

Soit A un sous-groupe fermé de W. On définit *l'orthogonal de A* comme le sous-groupe fermé $A^\perp = \{w \in W \mid \forall a \in A,\ \psi(< w, a >) = 1\}$. L'isomorphisme $W \simeq \widehat{W}_R$ permet alors d'identifier $A^\perp$ au groupe des caractères de W qui sont triviaux sur A, en d'autres termes, les caractères de W/A.

Lemme 3.1.1.1. *Soient A et B deux sous-groupes fermés de W. On a :*

1. $(A^\perp)^\perp = A$;
2. $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$;
3. *si $A^\perp + B^\perp$ est fermé, on a $A^\perp + B^\perp = (A \cap B)^\perp$.*

Démonstration. Les deux premiers sont faciles à prouver. Le troisième résulte des deux premiers. Notons que la condition du dernier point est toujours vérifiée si A ou B est compact. □

On dit d'un sous-groupe fermé $A \subset W$ qu'il est *autodual* si $A^\perp = A$. Il existe toujours de tels sous-groupes. Pour ne citer que les plus simples, sont auto-duaux, les lagrangiens définis dans la section 2.1, et les réseaux auto-duaux. On les explicitera dans les exemples de modèles explicites. Soit A un sous-groupe auto-dual de W. On pose $A_H = A \times F \subset H$.

C'est un sous-groupe de H, dont l'image dans $H/\mathrm{Ker}(\psi)$ est un sous-groupe commutatif maximal.

Lemme 3.1.1.2. *Il existe un caractère lisse ψ_A qui prolonge ψ à A_H. De plus, si $p \neq 2$ ou si A est un lagrangien, on peut choisir ψ_A trivial sur A.*

Démonstration. Tout caractère qui étend ψ à A_H doit vérifier pour tout $a, a' \in A$:

$$\psi_A((a,0))\psi_A((a',0)) = \psi_A((a+a',0))\psi(\frac{1}{2} < a, a' >).$$

Si A est auto-dual et $A = \frac{1}{2}A$, en posant $\psi_A((a,0)) = 1$, le caractère ψ_A est bien défini. Il est évident que ψ_A est lisse. La condition $A = \frac{1}{2}A$ est équivalente à $p \neq 2$ ou A est un lagrangien. En effet, si $p \neq 2$, on a toujours $\frac{1}{2}A = A$. De plus, la caractéristique de F est différente de 2 par hypothèse. Quand $p = 2$, le corps F est une extension finie de $\mathbb{Q}_2$. Si A est un lagrangien, c'est en particulier un F-espace vectoriel et donc $\frac{1}{2}A = A$.

Donnons maintenant une preuve qui construit ψ_A de manière inconditionnelle. On est ramené à résoudre le problème équivalent suivant : soit $C = F/\mathrm{Ker}(\psi)$, on cherche à étendre ψ à $D = A_H/\mathrm{Ker}(\psi)$. Ces deux groupes sont abéliens. Quitte à le choisir suffisamment petit, on peut prendre un sous-groupe compact ouvert L de W tel que $\frac{1}{2} < L, L > \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. On pose $B = L \cap A$ et $B_H = B \times F$. On peut à ce moment-là étendre ψ trivialement à l'ouvert $C' = (B \times F)/\mathrm{Ker}(\psi)$ de D. Notons ψ_A ce prolongement. Soit $x \in D \backslash C'$. On va montrer qu'on peut étendre ψ_A à $C' + < x >$. On a que $D/C' \simeq A/B$ est un p-groupe. Donc $\mathrm{ord}(x)$ est la plus petite puissance de p telle que $\mathrm{ord}(x)x \in C'$. Étant donné les hypothèses sur $\mu^p(R)$, on sait qu'il existe $u \in R$ une racine $\mathrm{ord}(x)$-ème de $\psi_A(\mathrm{ord}(x)x)$ dans R. On se donne un tel u et on prolonge $\psi_A(c + k\ x) = \psi_A(c)u^k$. Par minimalité de $\mathrm{ord}(x)$, ce prolongement est bien défini. Ainsi, si l'on se donne un prolongement maximal ψ_A, s'il n'est pas défini sur tout D, on peut toujours le prolonger. Par le lemme de Zorn, on a donc un prolongement ψ_A défini sur tout D. Il est lisse car $\mathrm{Ker}(\psi_A)$ est un sous-groupe ouvert de C', lui-même ouvert dans D. On obtient finalement un caractère lisse de D qui étend ψ, donc de A_H en composant par la projection $A_H \to D$. □

3.1.2 Pseudo-irréductibilité de $\natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$

Proposition 3.1.2.1. *Soit A un sous-groupe auto-dual de W, et soit $S_A = \natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$. Alors tout sous-$R[H]$-module lisse de S_A est de la forme IS_A, où I est un idéal de R.*

Démonstration. La preuve va se dérouler ainsi : nous allons d'abord montrer que l'espace S_A est engendrée par un ensemble de fonctions $\chi_{w,L}$ indexé par des éléments $w \in W$ et des réseaux L de W. Le but sera alors de prouver qu'étant donné un sous-$R[H]$-module S' de S_A, tout élément $f \in S'$ peut être envoyée sur une fonction proportionnelle à $\chi_{w,L}$; et ces coefficients de proportionnalité parcourt l'ensemble image de f. On se propose donc de montrer que $S' = IS_A$ où I est l'idéal de R engendré par les ensembles images des fonctions de S' *i.e.* $I =< f(h) \mid h \in H,\ f \in S' >$.

Soit $w \in W$ et L un sous-groupe compact ouvert de W tel que $A_H \cap (w,0)(L,0)(-w,0) \subset \mathrm{Ker}(\psi_A)$. On appelle cette condition $(\star_w)$. On peut toujours choisir un L_w suffisamment petit de sorte que tout $L \subset L_w$ vérifie $(\star_w)$. On définit $\chi_{w,L}$ de la façon suivante :

$$\chi_{w,L}(a(w,0)(l,0)) = \psi_A(a), \text{ si } a \in A_H \text{ et } l \in L$$

$$\chi_{w,L}(h) = 0 \text{ sinon}$$

Cette fonction est bien définie grâce à la condition $(\star_w)$. C'est un élément non trivial de S_A, donc $S_A \neq 0$. L'ensemble $\{\chi_{w,L}\}_{w\in W,\ L\subset L_w}$ engendre S_A en tant que R-module.

Soit $S' \neq 0$ un sous-$R[H]$-module de S_A. Soit $f \in S'$ non nulle. Pour tout $h_0 \in H$, il existe un élément de l'algèbre de Hecke de H qui envoie f sur $f(h_0).\chi_{w,L}$. En effet, soit $w \in W$. Quitte à translater, on peut supposer que la valeur de f en $((w,0))$ est $f(h_0)$. Il existe un sous-groupe compact ouvert L de W tel que $L \times \mathrm{Ker}(\psi)$ soit un ouvert compact dans le fixateur de f et L vérifie la condition $(\star_w)$. Soit μ_A une mesure de Haar sur A. Soit φ et Φ les fonctions localement constante à support compact dans A :

$$\varphi(a) = \frac{1}{\mathrm{vol}(L^\perp \cap A)}\psi(< -w, a >)1_{L^\perp\cap A}(a) \quad \text{et} \quad \Phi(a) = \psi_A((-a,0))\varphi(a)$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_A \psi(< w', a >)\varphi(a)d\mu_A(a) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(L^\perp \cap A)}\int_{L^\perp\cap A}\psi(< w'-w, a >)d\mu_A(a) \\ &= \begin{cases} 1 \text{ si } w' \in A+w+L \\ \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{L^\perp\cap A}\psi(< w'-w, a >)d\mu_A(a) &= \int_{(L+A)^\perp}\psi(< w'-w, a >)d\mu_A(a) \\ &= \begin{cases} \mathrm{vol}(L^\perp \cap A) \text{ si } w'-w \in A+L \\ \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Remarquons au passage que pour $h = (w', t) \in H$, la condition $w' \in A + w + L$ est équivalente à la condition $h \in A_H wL$.

Soit $\rho(\phi)$ l'application linéaire qui à une fonction f de S_A associe :

$$\rho(\phi)(f) : h \mapsto \int_A \phi(a)f(h(a,0))d\mu_A(a)$$

On a alors si $h = (w', t)$:

$$\begin{aligned}\rho(\phi)(f)(h) = \int_A f(h(a,0))\phi(a)d\mu_A(a) &= \int_A \psi(< w', a >)\psi_A((a,0))f(h)d\mu_A(a) \\ &= f(h)\int_A \psi(< w', a >)\varphi(a)d\mu_A(a) \\ &= f(h)\int_A \psi(< w', a >)\varphi(a)d\mu_A(a) \\ &= \begin{cases} f(h) \text{ si } w' \in A+w+L \\ \\ 0 \text{ sinon}\end{cases} \\ &= f((w,0)).\chi_{w,L}(h)\end{aligned}$$

On a donc $\rho(\phi)(f) = f(h_0).\chi_{w,L}$. Comme ϕ est localement constante à support compact dans A, un fermé de H, il existe un élément de l'algèbre de Hecke de H qui étend ϕ et tel que l'image de f par cet élément soit encore $\rho(\phi)(f)$. Finalement, on a bien $S' = IS_A$ où I est l'idéal de R engendré par $\{f(h) \mid f \in S',\ h \in H\}$. □

Le corollaire suivant se déduit immédiatement de la Proposition 3.1.2.1.

Corollaire 3.1.2.2. *S_A est un R-module simple si et seulement si R est un corps.*

3.1.3 Deux exemples importants : modèles de Schrödinger et latticiel

Suivant que A est un lagrangien ou un réseau auto-dual, voici les deux exemples qui servent de briques élémentaires à la construction ultérieure de la correspondance thêta.

Modèle de Schrödinger. Soit $W = X + Y$ une polarisation complète de W (cf. section 2.1). On pose $A = X$; et on a bien $A^\perp = X$. On peut simplement prolonger trivialement ψ à A_H d'après le Lemme 3.1.1.2, en posant $\psi_A((x,0)) = 1,\ \forall x \in A$. On identifie S_A à $C_c^\infty(Y)$ via $f \mapsto (y \mapsto f((y,0)))$. Si $h = (x+y,t)$, l'action de H sur l'espace de droite est alors donnée par :

$$\rho(h)f(y) = \psi(< y', x > + \frac{1}{2} < y, x > +t\ )f(y + y')$$

Modèle latticiel. Supposons F local non archimédien. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathcal{P}_F$ son idéal maximal. Soit l_ψ le niveau/conducteur de ψ. C'est le plus petit entier n tel qu'on ait $\mathcal{P}_F^n \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Soit A un réseau de W *i.e.* un sous-$\mathcal{O}_F$-module de type fini et de rang maximal. On a alors $A^\perp = \{w \in W \mid \forall a \in A,\ < w, a > \in \mathcal{P}_F^{l_\psi}\}$. C'est de nouveau un réseau de W, qui peut s'exprimer facilement dans une base hyperbolique. Explicitons les. Si $(e_i)_{|i| \in [\![1,n]\!]}$ désigne une base hyperbolique de W et $A = \bigoplus \mathcal{P}_F^{a_i} e_i$ est un réseau, alors $A^\perp = \bigoplus \mathcal{P}_F^{l_\psi - a_i} e_{-i}$. Il est auto-dual à condition qu'on ait $l_\psi = a_i + a_{-i}$. On suppose donc cette condition vérifiée. D'après le Lemme 3.1.1.2, il existe un caractère ψ_A de $A \times F$ tel $\psi_A((0,t)) = \psi(t)$ pour tout $t \in F$. Enfin, l'application linéaire $f \mapsto (w \mapsto f((w,0)))$ définit un isomorphisme entre S_A et les fonctions de $C_c^\infty(W)$ qui vérifient :

$$f(a + w) = \psi_A(< w, a >)f(w)\ \text{, pour tout } a \in A \text{ et } w \in W.$$

Et si $h = (w,t)$, l'action de H transportée sur le sous-espace de $C_c^\infty(W)$ en question est :

$$\rho(h)f(w') = \psi(t)\psi(\frac{1}{2} < w', w >)f(w' + w).$$

3.1.4 Unicité (pour R un corps)

On suppose maintenant que R est un corps. Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de H telle que F agisse par un caractère non trivial ψ. On va d'abord prouver que π est contenue dans la représentation droite ρ_d de l'induite compacte $\mathcal{S}(H,\psi) = \natural - \mathrm{ind}_F^H(\psi)$. On conclut alors en montrant que ρ_d est isotypique.

Soit donc (π, S) une représentation vérifiant les hypothèses du théorème de Stone-von Neumann. On note $(\pi^\vee, V^\vee)$ sa contragrédiente, qui est non-nulle d'après [Vig96, I.4.18] puisque R est un corps de caractéristique différente de p. On rappelle que pour tout $\check{v} \in V^\vee$, l'action de H sur $V^\vee$ est définie par $\pi^\vee(h)\check{v} : v \mapsto \check{v}(\pi(h^{-1})v)$. On note ρ_d et ρ_g, les représentations droites et gauches de $\mathcal{S}(H,\psi)$. Pour $v \in V$ et $\check{v} \in V^\vee$, on définit le coefficient $f_{\check{v},v} : h \mapsto \check{v}(\pi(h)v)$. Cette fonction est à support compact modulo le centre F de H. En effet, il existe un sous-groupe ouvert L de W tel que v et $\check{v}$ soient invariant par $(L,0)$. Soit $w \in W$ tel que $f_{\check{v},v}((w,0)) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_{\check{v},v}((w,0)) &= \check{v}(\pi((w,0))v) = \check{v}(\pi((w,0)(l,0))v) \\ &= \psi(< w,l >)\ \check{v}(\pi((l,0)(w,0))v) \\ &= \psi(< w,l >)\ \check{v}(\pi((w,0))v) \\ &= \psi(< w,l >)\ f_{\check{v},v}((w,0)). \end{aligned}$$

Comme R est intègre, les égalités précédentes doivent être vraies pour tout $l \in L$, cela entraîne que w appartient au sous-groupe ouvert compact $L^\perp$. Le support de $f_{\check{v},v}$ est donc contenu dans $L^\perp$, et finalement $f_{\check{v},v} \in \mathcal{S}(H,\psi)$. On a un $H \times H$-morphisme non trivial de $\pi^\vee \otimes \pi$ dans $\rho_g \times \rho_d$ où l'image du tenseur élémentaire $\check{v} \otimes v$ est $f_{\check{v},v}$:

$$V^\vee \otimes V \to \mathcal{S}(H,\psi).$$

D'où, pour $\check{v} \neq 0$, on obtient par restriction un H-morphisme non trivial $v \mapsto f_{\check{v},v}$ qui identifie (π, V) à une sous-représentation irréductible de $(\rho_d, \mathcal{S}(H,\psi))$. Il reste maintenant à prouver que ρ_d est isotypique.

Soit $W = X + Y$ une polarisation complète. On note $\mathcal{S}(U) = C_c^\infty(U)$. On considère la représentation de Schrödinger associée à ψ et $A = X$, notée $(\rho_\psi, \mathcal{S}(Y))$. On définit une dualité entre $\mathcal{S}(X)$ et $\mathcal{S}(Y)$ par :

$$< s', s >= \int_{X\times Y} s'(x)s(y)\psi(< x,y >)d\mu_X(x)d\mu_Y(y)$$

pour $s' \in \mathcal{S}(X)$, $s \in \mathcal{S}(Y)$, où on a fixé deux mesures de Haar μ_X et μ_Y sur X et Y. La contragrédiente de la représentation $(\rho_\psi, S(Y))$ s'identifie alors à la représentation de Schrödinger associée à ψ^{-1} et $A = Y$, c'est-à-dire $(\rho_{\psi^{-1}}, \mathcal{S}(X))$. On a donc, comme dans le paragraphe précédent, un morphisme entre les représentations $(\rho_\psi^\vee \otimes \rho_\psi, \mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y))$ et $(\rho_g \times \rho_d, \mathcal{S}(H,\psi))$. L'espace $\mathcal{S}(H,\psi)$ s'identifie d'une manière naturelle à $\mathcal{S}(W)$. En ce qui concerne, $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$ cela paraît moins immédiat. On prend l'unique morphisme de $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y) \mapsto \mathcal{S}(W)$ qui envoie un tenseur élémentaire $s' \otimes s$ sur le produit $w = x + y \mapsto s'(x)\ s(y)$. Pour s'en convaincre, prenons 1_L l'indicatrice d'un sous-groupe ouvert compact L de W. Si L s'écrit sous la forme $L = L \cap X + L \cap Y$, on a simplement $1_L = 1_{L\cap X}1_{L\cap Y}$ qui est l'image de $1_{L\cap X} \otimes 1_{L\cap Y}$. Sinon, on sait que $K = L \cap X + L \cap Y$ est un sous-groupe ouvert compact de L. Par conséquent on a, pour u parcourant un système de représentants de L/K :

$$\begin{aligned} 1_L(w) &= \sum_{u\in L/K} 1_{u+K}(w) \\ &= \sum_{u\in L/K} 1_K(w-u) \\ &= \sum_{u\in L/K} 1_{L\cap X}(x-u_x)1_{L\cap Y}(y-u_y) \\ &= \sum_{u\in L/K} 1_{u_x+L\cap X}(x)1_{u_y+L\cap Y}(y). \end{aligned}$$

Soit φ le morphisme de $\mathcal{S}(W) \mapsto \mathcal{S}(W)$ obtenu en composant

$$\mathcal{S}(W) \simeq \mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y) \to \mathcal{S}(H, \psi) \simeq \mathcal{S}(W)$$

On déduit que cette application est bijective du fait qu'elle ressemble à une transformée de Fourier. En effet, l'image de l'indicatrice d'un compact ouvert 1_L :

$$w \mapsto \sum_{u \in L/K} f_{1_{u_x+L\cap X}, 1_{u_y+L\cap Y}}((w, 0)).$$

En reprenant l'action explicite de H sur $\mathcal{S}(Y)$, on obtient pour $h = (w, 0)$:

$$\begin{aligned}
f_{\check{s},s}((w,0)) &= \ < s', \rho_\psi((w,0))s > \\
&= \int_{X\times Y} s'(x)\psi(< y, w_x > + \frac{< w_y, w_x >}{2})s(y + w_y)\psi(< x, y >)d\mu_X(x)d\mu_Y(y) \\
&= \psi(\frac{1}{2} < w_y, w_x >) \int_{X\times Y} \psi(< x - w_x, y - w_y >)s'(x)s(y)d\mu_X(x)d\mu_Y(y) \\
&= \psi(\frac{1}{2} < w_y, w_x >) \int_{X\times Y} \psi([x + y, w])\psi(< x, y >)s'(x)s(y)d\mu_X(x)d\mu_Y(y) \\
&= \psi(\frac{1}{2} < w_y, w_x >) \int_{W} \psi([v, w])\beta(v)f((v, 0))d\mu_W(v)
\end{aligned}$$

où le crochet est défini par $[w', w] =< w'_y, w_x > + < w_y, w_x >$ permet d'identifier W et son dual via $w \mapsto [., w]$, et la fonction $\beta : v = x + y \mapsto \psi(< x, y >)$ est localement constante et possède un inverse (pour la multiplication des fonctions). Ainsi, φ est la composée de $f \mapsto \beta f$, qui est un automorphisme de $\mathcal{S}(W)$, et de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(W)$ plus un twist. Comme R est intègre, la transformée de Fourier est bijective de $\mathcal{S}(W) \mapsto \mathcal{S}(W)$ d'après la Proposition A.1.2.1. Ainsi, $\rho_g \times \rho_d$ est isomorphe à $\rho_\psi^\vee \otimes \rho_\psi$ via φ. De l'irréductibilité de ρ_ψ, on déduit finalement que $(\rho_d, \mathcal{S}(H, \psi))$ est somme directe de représentations isomorphes à $(\rho_\psi, \mathcal{S}(Y))$. Cela termine la preuve.

3.2 Propriétés de la représentation métaplectique

On reprend les notations et les hypothèses précédentes, que l'on rappelle :

— R est un corps (de caractéristique différente de p) tel que :

$$\mu^p(R) = \begin{cases} \{\xi \in R^\times \mid \xi^p = 1\} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si la car. de } F \text{ est positive;} \\ \{\xi \in R^\times \mid \exists k \in \mathbb{N}, \xi^{p^k} = 1\} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

— pour $\psi \in \hat{F}_R$ un caractère non trivial, la représentation métaplectique ρ_ψ est l'unique classe d'isomorphisme du théorème de Stone-von Neumann ;

— pour tout sous-groupe auto-dual A de W, on a $S_A = \natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ est un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ ;

— les représentations ρ_g et ρ_d désignent respectivement l'action par translation à gauche et à droite de H sur $\mathcal{S}(H, \psi) = \natural - \mathrm{ind}_F^H(\psi)$.

Proposition 3.2.0.1. *On a les faits suivants :*

[contragrédiente] $\rho_\psi^\vee \simeq \rho_{\psi^{-1}}$, *de plus* $\rho_{\psi^{-1}} \otimes \rho_\psi$ *est isomorphe à* $\rho_g \times \rho_d$ *;*

[influence de $<,>$] *si $a \in F^\times$, on a par abus de notation $\rho_{a.\psi} \approx \rho_\psi \circ j_a$ où j_a est l'isomorphisme de groupes $(w,t) \in H(W,<,>) \mapsto (w,at) \in H(W, a<,>)$;*

[somme orthogonale] *si $W = W_1 \oplus W_2$ est une somme orthogonale, notons ρ_ψ, ρ_ψ^1, ρ_ψ^2 les représentations des groupes $H(W,<,>)$, $H(W_1,<,>)$, $H(W_2,<,>)$, et j l'homomorphisme surjectif $((w_1,t_1),(w_2,t_2)) \in (H(W_1,<,>), H(W_2,<,>)) \mapsto (w_1+w_2, t_1+t_2) \in H(W,<,>)$ dont le noyau est $\{((0,t),(0,-t) \mid t \in F\}$. Alors $\rho_\psi \circ j \approx \rho_\psi^1 \otimes \rho_\psi^2$;*

[semi-simplicité] *soit (ρ, S) une représentation lisse de H telle que $\rho((0,t)) = \psi(t) Id_S$, alors (si F est fini on suppose de plus R algébriquement clos) ρ est isomorphe à une somme directe de copies de ρ_ψ i.e. (ρ,S) est ρ_ψ-isotypique ;*

[admissibilité] *si R est intègre, $S_A = \natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ est un $R[H]$-module lisse admissible ;*

[absolue irréductibilité] *S_A est absolument irréductible ;*

[lemme de Schur] *S_A vérifie le lemme de Schur i.e. $\mathrm{End}_{R[H]}(S_A) = R$.*

Démonstration. [contragrédiente] Ces faits ont été vus dans la preuve de l'unicité.

[influence de $<,>$] + [somme orthogonale] Il s'agit de vérifier que ces représentations vérifient les hypothèses du théorème de Stone-von Neumann. Ceci est assez immédiat au vu des définitions.

[semi-simplicité] Si F est fini, comme H est un p-groupe fini et que la caractéristique de R est première à p, la représentation ρ est semi-simple. Et chaque facteur irréductible est de dimension finie et a comme caractère central ψ, donc est isomorphe à ρ_ψ par le théorème de Stone-von Neumann.

Supposons maintenant F local non archimédien. Pour toute représentation lisse (ρ', S') de H vérifiant $\rho'((0,t)) = \psi(t)\mathrm{Id}_S$, notons $S'(\psi_A)$ l'espace des vecteurs $s' \in S'$ tels que $\rho'(a)s' = \psi_A(a)s'$ pour tout $a \in A_H$. Le foncteur $S' \mapsto S'(\psi_A)$ des ψ_A-invariants est exact d'après [Vig96, I.4.11]. En effet, $A \times F$ est filtré par ses sous-groupes compacts ouverts, dont les pro-ordres sont p^∞, donc inversibles dans R. Utilisons ρ_ψ le modèle de Schrödinger construit précédemment. On a que $S_A(\psi_A)$ est de dimension 1. En effet, si $f \in S_A(\psi_A)$:

$$\begin{aligned}\psi_A((a,0))f((w,0) = \rho_\psi((a,0))f((w,0)) = f((w,0)(a,0)) &= f((a,<w,a>)(w,0)) \\ &= \psi(<w,a>)\psi_A(a)f((w,0))\end{aligned}$$

Comme R est intègre, on obtient que $\psi(<w,a>) = 1$ pour tout $a \in A$. Donc le support de $f_{(W,0)}$ est contenu dans $A^\perp = A$ qui est un réseau de W. Ainsi, le support de f est A_H et $S_A(\psi_A)$ est engendré par la fonction $\chi_{0,A}$. Notons $\mathscr{H} = \mathcal{S}(H, \psi^{-1})$, et $\mathscr{H}_A$ l'espace des fonctions $f \in \mathscr{H}$ telles que $\rho_g(a)\rho_d(a')f = \psi_A(a)\psi_A^{-1}(a')f$ pour tous $a, a' \in A_H$. On a vu plus haut que $\rho_g \times \rho_d \simeq \rho_\psi \otimes \rho_{\psi^{-1}}$, donc $\mathscr{H}_A$ est de dimension 1. Il est engendré par la fonction définie par :

$$f_A(h) = \chi_{0,A}(h^{-1}) = \begin{cases} \psi_A^{-1}(h) \text{ si h } \in A_H \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Fixons une mesure de Haar sur W telle que A soit de mesure 1. L'espace $\mathscr{H}$ muni du produit de convolution est une algèbre, et pour (ρ', S') comme ci-dessus, $\mathscr{H}$ agit naturellement dans S'. C'est le cas en particulier de $\mathscr{H}_A$. L'opérateur $\rho'(f_a)$ est un projecteur de S', d'image $S'(\psi_A)$. Soient alors S' l'espace de l'énoncé, $s \in S(\psi_A)$, $s \neq 0$, et S' le sous-H-module de S engendré par s. On a $S' = \rho(\mathscr{H})s = \rho(\mathscr{H} * f_A)q$, donc $S'(\psi_A) = \rho(f_A)S' = \rho(f_A * \mathscr{H} * f_A)s = \rho(\mathscr{H}_A)s = Rs$. Par exactitude, et grâce au théorème de Stone-von Neumann, S' admet donc au plus un sous-quotient irréductible, *i.e.* S' est irréductible. Soit alors S'' le sous-module de S engendré par $S(\psi_A)$. D'après ce qui précède, S'' est engendré par ses sous-modules irréductibles et est donc somme directe de tels sous-modules. D'autre part $S''(\psi_A) = S(\psi_A)$, donc par exactitude $(S/S'')(\psi_A)$, et comme précédemment $S/S'' = \{0\}$. D'où $S = S''$, ce qui achève la preuve.

[admissibilité] On va montrer que $\natural - \mathrm{Ind}_{A_H}^H(\psi_A) = \natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ et utiliser le Lemme 1.1.3.5. Il suffit donc de montrer que toute fonction de $\natural - \mathrm{Ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ est à support compact modulo A_H. En effet, soit L un compact ouvert de W tel que $(L, 0)$ soit dans le fixateur de f. Soit $w \in W$ tel que $f((w, 0)) \neq 0$. Pour $l \in L \cap A$, on a

$$f((w,0)) = f((w,0)(l,0)) = f((l,< w,l >)(w,0)) = \psi(< w,l >)\psi_A((l,0))f((w,0))$$

d'où l'on déduit que $\psi(< w, l >) = \psi_A((-l, 0))$. L'image de w dans $W/(L \cap A)^\perp$ est donc bien déterminée. Comme $(L \cap A)^\perp = L^\perp + A$ et $L^\perp$ est compact, l'image de w dans W/A est dans un compact bien déterminé. Le support de f est donc bien contenu dans un compact modulo A_H.

[absolue irréductibilité] Soit donc R' une extension de corps de R, et $S_A = \natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ un modèle de la représentation métaplectique pour un sous-groupe autodual A. Par propriété de l'induite compacte, $S_A \otimes R'$ est simplement l'induite compacte de ψ_A vu comme un caractère à valeurs dans R', en d'autres termes, ce sont les fonctions lisses $f : H \to R'$ à support compact modulo A_H qui vérifient $f(ah) = \psi_A(a)f(h)$ pour tout $a \in A_H$, $h \in H$. Comme R' est un corps, cette représentation est bien irréductible d'après la Proposition 3.1.2.1.

[lemme de Schur] L'admissibilité et l'absolue irréductibilité de S_A permettent d'appliquer le lemme de Schur 1.1.3.6. D'où $\mathrm{End}_{R[H]}(S_A) = R$. □

3.3 Opérateurs d'entrelacement $S_{A_1} \longrightarrow S_{A_2}$

On reconduit les mêmes hypothèses sur R qu'à la Section 3.2. L'unicité affirmée par le théorème de Stone-von Neumann entraîne que pour deux sous-groupes auto-duaux de W (cf. Section 3.1.1), les modèles construits sont isomorphes. Dans ce paragraphe, nous cherchons à décrire explicitement l'opération de changement de modèle. Soient donc A_1 et A_2 deux sous-groupes autoduaux de W. On suppose de plus que $A_1 + A_2$ est fermé. On note ψ_{A_1} (resp. ψ_{A_2}) un caractère de $A_{1,H} = A_1 \times F$ (resp. $A_{2,H}$) qui étend ψ. On peut alors définir explicitement un morphisme d'entrelacement entre S_{A_1} et S_{A_2}.

Proposition 3.3.0.2. *Soit μ une mesure de Haar sur $A_{1,H} \cap A_{2,H} \backslash A_{2,H} = A_1 \cap A_2 \backslash A_2$ à valeurs dans R. Il existe $\omega \in W$, unique à addition près d'un élément de $A_1 + A_2$, vérifiant la condition :*

$$\forall a \in A_1 \cap A_2,\ \psi_{A_1}((a,0))\psi_{A_2}((a,0))^{-1} = \psi(< a, \omega >).$$

Alors l'application qui à $f \in S_{A_1}$ associe :

$$h \longmapsto \int_{A_{1,H} \cap A_{2,H} \backslash A_{2,H}} \psi_{A_2}(a)^{-1} f((\omega,0)ah)\ d\mu(a)$$

est un isomorphisme qui entrelace les représentations S_{A_1} *et* S_{A_2} *de* H*. On la note* $I_{A_1,A_2,\mu,\omega}$*.*

Démonstration. L'existence d'un tel ω provient de l'isomorphisme entre W, W^* et $\hat{W}_R$. L'unicité à addition près d'un élément de $A_1 + A_2$ vient du fait que si ω et ω' vérifient la condition de l'énoncé, alors pour tout $a \in A_1 \cap A_2$, on a $\psi(< a, \omega - \omega' >) = 1$ *i.e.* $\omega - \omega' \in (A_1 \cap A_2)^{\perp}$. Or, $A_1 + A_2$ est fermé par hypothèse, il suffit donc d'appliquer le dernier point du Lemme 3.1.1.1 car A_1 et A_2 sont autoduaux.

Ensuite, il y a un léger abus de notation puisque $a \mapsto \psi_{A_2}(a)^{-1} f((\omega, 0)ah)$ est une fonction sur $A_{2,H}$. Mais cette fonction est invariante à gauche par $A_{1,H} \cap A_{2,H}$. Elle est bien à support compact modulo $A_{1,H} \cap A_{2,H}$ car l'hypothèse $A_1 + A_2$ fermé assure que l'image de $A_{2,H}$ dans $A_{1,H}\backslash H$ soit fermée. D'où la consistance de la notation (et la convergence de l'intégrale). On montre ensuite facilement que la fonction intégrale définie est dans S_{A_2}. L'application de la proposition est donc un morphisme d'entrelacement entre deux représentations irréductibles de H, c'est donc un isomorphisme si et seulement s'il est non-trivial. Il suffit enfin de remarquer que l'image d'une fonction indicatrice $\chi_{w,L}$ de S_{A_1} est bien non-triviale. □

Remarque 3.3.0.3. L'expression du morphisme d'entrelacement se simplifie grandement si l'on peut étendre ψ trivialement à A_1 et A_2, ce qui est vrai d'après le Lemme 3.1.1.2 si $p \neq 2$, ou si A_1 et A_2 sont des lagrangiens. Ainsi, $w = 0$ convient et on obtient simplement :

$$I_{A_1,A_2,\mu} f : h \longmapsto \int_{A_1 \cap A_2 \backslash A_2} f((a,0)h) d\mu((a,0)).$$

Remarque 3.3.0.4. Supposons que l'on se restreigne exclusivement au cas où les A_i sont des lagrangiens. Alors le lemme de Schur 3.2.0.1 entraîne que :

$$I_{A_2,A_3,\mu'} \circ I_{A_1,A_2,\mu} \equiv I_{A_1,A_3,\mu''} \mod R^{\times}$$

où $\equiv$ signifie que ces deux opérateurs sont proportionnels à un scalaire de $R^{\times}$ près. C'est précisément l'enjeu de l'article de [Per81] de déterminer dans le cas complexe de bons choix de mesures, et d'établir ensuite les formules de composition de ces opérateurs d'entrelacement. On montre dans la Section 4.4 que cette stratégie s'applique encore et qu'on obtient des formules similaires à celles de [Per81].

Chapitre 4

Le groupe métaplectique et la représentation de Weil

On reprend les hypothèses et notations de la section 3 :

- F est un corps de caractéristique différente de 2, et qui est soit fini de caractéristique p, soit local non archimédien de caractéristique résiduelle p ;
- W est un espace symplectique de dimension finie (et paire) n sur F ;
- R est un corps (de caractéristique différente de p) tel que :

$$\mu^p(R) = \begin{cases} \{\xi \in R^\times \mid \xi^p = 1\} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si la car. de } F \text{ est positive ;} \\ \{\xi \in R^\times \mid \exists k \in \mathbb{N}, \xi^{p^k} = 1\} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

- pour $\psi \in \hat{F}_R$ un caractère non trivial de F à valeurs dans R, la représentation métaplectique ρ_ψ est l'unique classe d'isomorphisme affirmée par le théorème de Stone-von Neumann 3.0.0.46 ;
- pour tout sous-groupe sous-groupe auto-dual A de W et tout caractère ψ_A qui étend ψ à $A \times F$ (cf. Section 3.1.1), la représentation $S_A = \natural - \mathrm{ind}_{A_H}^H(\psi_A)$ est un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ (cf. Section 3.1.3 & Section 3.1.4).

On ajoute les hypothèses suivantes :

- on suppose que R n'est pas [1] de caractéristique 2 et contient une racine carrée de p que l'on fixe dorénavant ;
- de la Section 4.5.3 à la fin, le corps R est supposé algébriquement clos.

On définit dans cette section la représentation de Weil. Elle est construite à partir d'une représentation projective du groupe symplectique, qui est elle-même obtenue à l'aide du théorème de Stone-von Neumann. Cette représentation de Weil est définie sur une extension centrale du groupe symplectique par $R^\times$, que l'on montre être $\mathrm{Sp}(W) \times R^\times$ quand F est fini, et le groupe groupe métaplectique (cf. Définition 1.3.0.12) quand F est local non-archimédien. On montre au passage que le groupe métaplectique est localement profini et que la représentation de Weil est lisse et admissible. On déduit de la Section 3.1.3 des modèles explicites pour la représentation de Weil. Celle-ci possède également

1. L'hypothèse R de caractéristique différente de 2 assure que l'on retrouve les résultats classiques concernant le groupe métaplectique et la représentation de Weil. Il serait intéressant de développer la situation qu'en la caractéristique de R est 2, les constructions de [CT13] et les nôtres fonctionnant encore. En effet, la Proposition 4.1.0.5 est encore valable. Le temps ne permet pas de plus développer ce point dans ce travail malheureusement.

des propriétés héritées de celles de la représentation métaplectique (cf. Section 3.2). Cette partie est une généralisation des résultats de [MVW87, Chap. 2, II].

Ensuite, on exprime alors la loi du 2-cocyle associé pour le groupe métaplectique à l'aide des méthodes de [Per81] et [RR93]. Pour finir, on se concentre sur la restriction de la représentation de Weil aux paires duales (cf. Section 2.3), ou plutôt aux relevés de ces paires duales dans le groupe métaplectique. On retrouve les résultats de [Kud94] concernant les scindages de ces paires et on donne les formules explicites pour la restriction de la représentation de Weil selon les types des paires considérées. Cette section se clôt en définissant la représentation $\Theta(\pi)$, ainsi que les paires duales banalçoires et l'identité seesaw.

4.1 Définition de la représentation de Weil

Soit $(\rho_\psi, S) \in \mathrm{Rep}_R(H)$ un modèle de la représentation métaplectique du groupe d'Heisenberg H. Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ agit sur H via $g.(w,t) = (g.w, t)$. Cette action fixe le centre de H, et préserve la représentation métaplectique au sens suivant : si $g \in \mathrm{Sp}(W)$, on note $\rho_\psi^g : h \mapsto \rho_\psi(g.h)$, alors la représentation (ρ_ψ^g, S) est un autre modèle de la représentation métaplectique. Par le théorème de Stone-von Neumann, elle est équivalente à ρ_ψ *i.e.* il existe $M_g \in \mathrm{GL}(S)$ tel que :

$$M_g \rho_\psi(h) M_g^{-1} = \rho_\psi(g.h), \text{ pour tout } h \in H. \tag{4.1}$$

Le lemme de Schur 3.2.0.1 assure qu'un tel M_g est projectivement unique c'est-à-dire unique à un inversible près de R. On obtient ainsi une représentation projective $\rho : g \in \mathrm{Sp}(W) \mapsto \bar{M}_g \in \mathrm{PGL}(S)$ du groupe symplectique. Appliquons-lui la machinerie exposée dans la section 1.3 :

Proposition 4.1.0.5. *Le produit fibré $\widetilde{Sp}_{\psi,S}(W) = Sp(W) \times_{PGL(S)} GL(S)$ de $Sp(W)$ et $GL(S)$ au-dessus de $PGL(S)$ relève la représentation projective $Sp(W) \to PGL(S)$ via la seconde projection. C'est une extension centrale de $Sp(W)$ par $R^\times$ et on a donc une suite exacte courte :*

$$1 \to R^\times \xrightarrow{i} \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W) \xrightarrow{p} Sp(W) \to 1. \tag{4.2}$$

Sauf dans le cas $F = \mathbb{F}_3$ et $\dim_F W = 2$, toutes les extensions centrales ainsi construites sont canoniquement isomorphes. Si S et S' sont deux modèles de la représentation métaplectique associée à ψ, alors pour tout isomorphisme de représentations $\phi : S \to S'$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W) & \to & \widetilde{Sp}_{\psi,S'}(W) \\ (g, M) & \mapsto & (g, \phi M \phi^{-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'extension centrale qui ne dépend pas de ϕ, qu'on note $\Phi_{S,S'}$.

Démonstration. On utilise les résultats de la Section 1.3 sur les extensions centrales de groupes. Il est évident que tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(S, S')$ induit un isomorphisme d'extension centrale de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ vers $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S'}(W)$. Le seul point qui peut poser problème est le caractère canonique de l'identification pour deux modèles S et S'. Or, le lemme de Schur 3.2.0.1 assure que $\mathrm{Hom}_{R[H]}(S, S')$ est de dimension 1 sur R et que tous les éléments non-nuls sont inversibles. Donc le morphisme de groupes :

$$M \in \mathrm{GL}(S) \mapsto \phi M \phi^{-1} \in \mathrm{GL}(S)$$

ne dépend pas du choix de l'élément non-nul $\phi \in \mathrm{Hom}_{R[H]}(S, S')$. Et comme le groupe symplectique est parfait, excepté dans le cas exceptionnel $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, le Corollaire 1.3.0.9 entraîne que tout automorphisme d'extension centrale $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est l'identité. Le morphisme $(g, M) \mapsto (g, \phi M \phi^{-1})$ est donc le seul morphisme d'extension centrale entre $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ et $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S'}(W)$. Et ce morphisme est compatible à la structure de produit fibré. □

Pour voir ces extensions comme des extensions topologiques, nous avons maintenant besoin de spécifier un modèle S et d'étudier les propriétés de la représentation $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W) \to \mathrm{GL}(S)$, où S est muni de la topologie discrète et $\mathrm{GL}(S)$ de la topologie de la convergence simple (cf. Section 1.1). Et transférer si possible les propriétés à toutes les autres extensions à l'aide de $\Phi_{S,S'}$, qui sont manifestement continues pour la topologie en question. Il y a un vrai leitmotiv pour aborder ce type de problème, à savoir, toujours choisir le modèle explicite S le plus pratique au vu du contexte et de notre but.

Théorème 4.1.0.6.

1. *Si F est fini, il existe un homomorphisme de groupes continu $Sp(W) \to \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$ qui scinde la suite exacte (4.2). À l'exception du cas exceptionnel $F = \mathbb{F}_3$ et $dim_F W = 2$, cet homomorphisme est unique.*
2. *Si F est local non archimédien, un tel homomorphisme n'existe pas. En revanche, il existe un unique sous-groupe $\widehat{Sp}_{\psi,S}(W)$ de $\widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$ tel que la restriction de p à ce sous-groupe soit surjective et ait un noyau d'ordre 2. Ce sous-groupe est ouvert, et la restriction de p à ce sous-groupe admet des sections locales.*

Démonstration. On munit donc $\mathrm{Sp}(W)$ de la topologie issue de F et $\mathrm{GL}(S)$ de la topologie de la convergence simple. Il s'agit de prouver que $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est bien un groupe topologique. Pour ce faire, il suffit de prouver la continuité de l'application $\mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S)$ précédente, où $\mathrm{PGL}(S)$ est muni de la topologie quotient $\mathrm{GL}(S) \to \mathrm{PGL}(S)$.

Dans le cas fini, le morphisme $\mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S)$ est toujours continu puisque $\mathrm{Sp}(W)$ est muni de la topologie discrète. Il reste à prouver l'assertion concernant le scindage $\mathrm{Sp}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. Excepté dans le cas évoqué, le groupe symplectique est parfait. Ce scindage sera automatiquement unique car il induit un isomorphisme d'extension centrale $\mathrm{Sp}(W) \times R^\times \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$, qui est unique d'après le Corollaire 1.3.0.9. Enfin, le scindage en question existe bel et bien en vertu du [Ste62, Th. 3.3.]. En effet, quand F est fini, le groupe symplectique est son propre revêtement universel au sens de [Moo68]. Cela signifie que toute extension centrale du groupe symplectique est scindée.

Dans le cas local non-archimédien maintenant, il s'agit d'abord de prouver que la représentation projective $\rho : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S)$, définie à partir de S, est continue. On montrera dans la Proposition 4.3.0.4 que si A est un réseau autodual de W, on peut relever $\rho : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S_A)$ en une application continue $\mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{GL}(S_A)$. Donc $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est un groupe topologique. On prouvera également dans la Proposition 4.3.0.4 qu'il existe un sous-groupe ouvert trivialisant de $\mathrm{Sp}(W)$ pour $p : \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$. Cela munit $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W)$ d'une base de voisinages de l'identité constituée de sous-groupes ouverts compacts, donc $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W)$ est un groupe localement profini. On voit ensuite facilement que le morphisme $\Phi_{S_A,S'}$ défini dans la Proposition 4.1.0.5 réalise un homéomorphisme $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S'}(W)$ qui commute aux projections.

Ensuite, on prouve l'assertion sur le sous-groupe $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. Quand $R = \mathbb{C}$, [Wei64] montre qu'il existe un caractère (continu) $A_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^\times$ d'une extension centrale $A_{\mathbb{C}}$ de $\mathrm{Sp}(W)$

par $\mathbb{C}^\times$, dont le noyau est $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$, l'unique extension centrale non-triviale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\{\pm 1\}$ (cf. Définition 1.3.0.12). Ce résultat a été étendu dans [CT13, §5]. Il est valable ici étant donné les hypothèses sur R. On en déduit qu'il existe un caractère (lisse) $A_R \to R^\times$ dont le noyau est également $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$. On explique dans l'Annexe A.2 comment traduire ces résultats dans notre contexte en identifiant A_R et $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. On obtient donc un caractère (lisse) $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W) \to R^\times$ dont le noyau $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$. D'après le Corollaire 1.3.0.10, le groupe $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est parfait. De plus, il contient le groupe dérivé de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. D'où $[\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W), \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)] = \widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. □

Le groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ provient de la Définition 1.3.0.12.

Corollaire 4.1.0.7. *Soit (ρ_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique associée à ψ.*

[F fini] *excepté dans le cas exceptionnel où $Sp(W) = SL_2(\mathbb{F}_3)$, il existe un unique morphisme d'extensions centrales entre le produit cartésien $\widetilde{Sp}(W) = Sp(W) \times R^\times$ et le groupe $\widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$.*

[F local non archimédien] *on fixe une réalisation $\widetilde{Sp}(W)$ du groupe métaplectique, alors il existe un unique isomorphisme d'extensions centrales topologiques $\widetilde{Sp}(W) \to \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$.*

Définition 4.1.0.8 (Représentation de Weil.)**.** Excepté dans le cas exceptionnel, on appelle *représentation de Weil associée à W et ψ* la classe d'isomorphisme ω_ψ des représentations obtenues en composant $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W) \to \mathrm{GL}(S)$. Dans le cas exceptionnel il demeure une ambiguïté : cela nécessite de préciser le plongement $\mathrm{Sp}(W) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ donc un caractère $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \to R^\times$.

Cette représentation est lisse d'après la Proposition 1.3.0.15. Des questions plus ou moins liées surgissent alors si l'on veut comprendre un peu plus le groupe métaplectique et la représentation de Weil. Les sections 4.2, 4.3 et 4.4 seront l'occasion d'apporter des réponses claires aux questions que l'on formule ici.

Question 1 : quels modèles sait-on expliciter ?

En se servant des modèles explicites S_A de la représentation métaplectique (cf. Section 3.1.3), on obtient des expressions tout aussi explicites de modèles de la représentation de Weil. On obtient alors les trois décalques de la représentation de Weil : à savoir les modèles de Schrödinger, mixte et latticiel. Mais il en existe d'autres – au moins autant que de modèles de la représentation métaplectique ! – qui ne proviennent pas de cette construction.

Question 2 : peut-on rendre explicite la loi de groupe de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ ou de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$?

Dans le cas non-archimédien, celle-ci est déterminée par la classe de cohomologie du 2-cocycle associé à une section globale de la projection p. La stratégie de Perrin [Per81] est d'expliciter ce 2-cocycle dans le cas d'un modèle de Schrödinger de la représentation de Weil (A est un lagrangien). Comme le groupe métaplectique est scindé sur le groupe métaplectique réduit, il suffit de connaître la loi explicite dans ce dernier. [RR93] obtient par une autre méthode un 2-cocyle dans la même classe de cohomologie. On fait le lien entre ces deux méthodes.

Question 3 : quelles sont les propriétés de la représentation de Weil (lissité, admissibilité, etc.) ?

La réponse que l'on formule reprend le leitmotiv déjà évoqué : on choisit le modèle le plus adapté à la situation, et l'on sait que c'est ensuite vrai pour toute la classe d'isomorphisme définie par la représentation de Weil.

4.2 Modèles explicites de la représentation métaplectique

4.2.1 Modèles de la représentation de Weil comme décalque des S_A

On note $(\rho_d, \natural-\mathrm{Ind}_F^H(\psi))$ la représentation où H agit par translation à droite. Pour tout sous-groupe auto-dual A de W, on peut voir le modèle (ρ_ψ, S_A) de la représentation métaplectique comme contenue canoniquement dans ρ_d. L'action de $\mathrm{Sp}(W)$ sur H donne un isomorphisme $I_g : S_A \to S_{gA}$ qui à toute fonction $f \in S_A$ associe la fonction $g.f : h \mapsto f(g^{-1}.h)$. L'action de H sur S_{gA} via I_g est donnée par :

$$I_g \circ \rho_d(w,t) = \rho_d(g.w,t) \circ I_g.$$

En composant avec les morphismes $I_{A_1,A_2,\mu,\omega}$ de la section 3.3, on obtient :

$$S_A \xrightarrow{I_g} S_{gA} \xrightarrow{I_{gA,A,\mu,\omega}} S_A,$$

qui vérifie :

$$I_{gA,A,\mu,\omega} \circ I_g \circ \rho_d(w,t) = \rho_d(g.w,t) \circ I_{gA,A,\mu,\omega} \circ I_g.$$

Ainsi :

$$(g, I_{gA,A,\mu,\omega} \circ I_g) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W).$$

Modèle de Schrödinger. Soit $W = X + Y$ une polarisation complète. Identifions Y à X^* et réalisons ρ_ψ dans $\mathcal{S}(X^*)$. D'après la Remarque 3.3.0.3, l'opérateur $I_{gX,X,\mu,w} \circ I_g$ devient :

$$r_\mu[g] : f \mapsto (h \mapsto \int_{gX\cap X\backslash X} (g.f)((a,0)h)\ d\mu((a,0))).$$

Si $g \in P(X)$, on fixe μ_g la mesure du singleton $gX \cap X\backslash X$ comme égale à 1. Plus généralement, on choisit des mesures μ_g de sorte qu'on ait pour tout $p \in P(X)$, $\mu_{gp} = \mu_g$. La mesure μ_g ne dépend donc que de $gX \cap X\backslash X$. Alors $\sigma : g \in \mathrm{Sp}(W) \mapsto (g, r_{\mu_g}[g]) \in \widetilde{Sp}_{\psi,S_X}(W)$ est une section ensembliste de la projection $p : \widetilde{Sp}_{\psi,S_X}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$. Ceci permet d'identifier $\widetilde{Sp}_{\psi,S_X}(W)$ avec le groupe $\mathrm{Sp}(W) \times R^\times$ muni d'un 2-cocycle que l'on explicitera dans la Proposition 4.4.0.14. Enfin, on a un isomorphisme canonique d'extension centrale entre $\mathrm{Sp}(W) \times R^\times$ et $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ qui est donné par une section $t : g \in \mathrm{Sp}(W) \mapsto R^\times$. Ainsi :

$$\omega_\psi((g,\lambda))f(x^*) = \lambda t(g) r[g] f(x^*).$$

En identifiant tout élément $g \in \mathrm{Sp}(W)$ à la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ qui lui correspond pour la décomposition $W = X + X^*$, on obtient finalement :

— sur le parabolique $P(X)$ pour lequel $c = 0$:

$$r[g]f(x^*) = |a^*|^{\frac{1}{2}} \psi(\frac{1}{2} < a^*x^*, b^*x^* >) f(a^*x^*) \ ;$$

— pour un élément de la forme $\begin{bmatrix} 0 & c^{*-1} \\ c & 0 \end{bmatrix}$:

$$r[g]f(x^*) = \int_X \psi(< x, x^* >) f(c^* x)|c^*|^{\frac{1}{2}} d\mu_X(x).$$

Modèle de Schrödinger "mixte". Soit X un sous-espace totalement isotrope non nul et non maximal de W. Identifions W à $X + W^0 + X^*$. Soit (ρ_ψ^0, S^0) un modèle de la représentation métaplectique de $H(W^0, <,>)$. Réalisons la représentation métaplectique de $H(X + X^*, <,>)$ dans $\mathcal{S}(X^*)$. Alors $\mathcal{S}(X^*) \otimes S^0$ est un modèle de la représentation métaplectique de $H(W, <,>)$. Soit $P(X)$ le stabilisateur de X dans $\mathrm{Sp}(W)$ et $j : P(X) \to \mathrm{Sp}(W^0)$ l'homomorphisme naturel. Notons $p : \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S^0}(W^0) \to \mathrm{Sp}(W^0)$ la projection. Soit $P'(X)$ l'ensemble des $(g, \widetilde{u}) \in P(X) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S^0}(W^0)$ tels que $j(g) = p(\widetilde{u})$. On considère les sous-groupes $M'(X) = \{(p, \widetilde{u}) \in P'(X) \mid p = m(a, u) \in M(X)\}$ et $N'(X) = \{(n, 1) \mid n \in N(X)\}$ de $P'(X)$. Alors $P'(X)$ est le produit semi-direct de $M'(X)$ et $N'(X)$. On définit une représentation $(g, \widetilde{u}) \longmapsto M[g, \widetilde{u}]$ du groupe $M'(X)$ sur $\mathcal{S}(X^*) \otimes S^0 \simeq \mathcal{S}(X^*, S^0)$, en posant pour $f \in \mathcal{S}(X^*, S^0)$:

$$M[g, \widetilde{u}]f : x^* \mapsto |a|^{\frac{1}{2}} M^0 f(a^* x^*), \text{ où } (g, \widetilde{u}) = (m(a, u), (u, M^0)) \in M'(X).$$

De même, on définit une représentation de $N'(X)$ en posant :

— pour $g = n_1(s) \in N_1(X)$ et $\widetilde{u} = 1$,

$$M[g, \widetilde{u}]f(x^*) = \psi(\frac{< sx^*, x^* >}{2}) f(x^*) \;;$$

— pour $g = n_2(h) \in N_2(X)$ et $\widetilde{u} = 1$,

$$M[g, \widetilde{u}]f(x^*) = \rho_\psi^0((h^* x^*, 0)) f(x^*).$$

Ces formules se prolongent en une représentation $(g, \widetilde{u}) \longmapsto M[g, \widetilde{u}]$ du groupe $P'(X)$. En choisissant un lagrangien de W^0, on a de plus $(g, M[g, \widetilde{u}]) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_{X+X_0}}(W)$ pour tout $(g, \widetilde{u}) \in P'(X)$. En particulier l'image réciproque $\widetilde{P}(X)$ de $P(X)$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_{X+X_0}}(W)$ est isomorphe à $P'(X)$.

Modèle latticiel. Supposons F de caractéristique résiduelle différente de 2. Soit A un réseau autodual de W (cf. section 3.1.1). L'hypothèse sur F permet d'étendre le caractère ψ trivialement à A d'après le Lemme 3.1.1.2, ce qui simplifie considérablement les changements de modèle décrits dans la section 3.3. Pour $g \in \mathrm{Sp}(W)$, $A/gA \cap A$ est fini. On le munit de la mesure de comptage. On sait alors que $(g, M(g)) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W)$ et $M[g] = I_{gA,A} \circ I_g$. Pour rendre cet opérateur explicite, on a pour tout $w \in W$ et $a \in A$:

$$M[g]f((w, 0)) = \sum_{a \in A/gA \cap A} (I_g f)((a, 0)(w, 0)) = \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi(\frac{< a, w >}{2}) f((g^{-1}(a + w), 0)).$$

Ainsi, si K est le stabilisateur de A dans $\mathrm{Sp}(W)$, la formule se simplifie. Pour tout $k \in K$, on a :

$$M[k]f((w, 0)) = f((k^{-1}w, 0))$$

Cela définit une représentation lisse de K car $f|_W \in C_c^\infty(W)$.

Remarque 4.2.1.1. Le modèle latticiel existe en caractéristique résiduelle 2. Seulement, le fait que le caractère ψ_A ne soit plus trivial sur A amène à des formules qui ne sont guère exploitables. On les donne à titre de remarque. Des calculs peuvent aussi être menés sur ce modèle. Soit A un réseau auto-dual de W et ψ_A un caractère qui étend ψ à $A \times F$. On note K le stabilisateur de A dans $\mathrm{Sp}(W)$. On peut choisir $\psi_{kA} = \psi_A$ pour étendre ψ à $kA \times F = A \times F$. Ainsi, on peut choisir $w_k = 0$ dans la Proposition 3.3.0.2. On trouve que pour tout $k \in K$, l'action de K sur S_A vu comme un sous-espace de $C_c^\infty(W)$ est donnée par :

$$M[k]f((w,0)) = f((k^{-1}w,0)).$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, cette action de K sur S_A est lisse. En revanche, les formules pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$ changent. En effet, si on choisit un système de représentants de $\mathrm{Sp}(W)/K$ dans $\mathrm{Sp}(W)$, pour tout $g \in \mathrm{Sp}(W)$, on a $gA = g_0A$ où g_0 est le représentant de g. Ainsi, en posant $\psi_{gA} = \psi_{g_0A} : a \in g_0A \times F \mapsto \psi_A((g_0^{-1}a,t)) \in R^\times$ et en choisissant w_{g_0} comme dans la Proposition 3.3.0.2, on a :

$$M[g]f((w,0)) = \sum_{a \in A/g_0A\cap A} \psi_A((a,0))^{-1}(I_gf)((w_{g_0},0)(a,0)(w,0)).$$

Ce que l'on peut développer en :

$$M[g]f((w,0)) = \psi(\frac{1}{2} < w_0, w >)\times$$
$$\sum_{a \in A/g_0A\cap A} \psi_A((a,0))^{-1}\psi(\frac{1}{2} < w_0 - w, a >)f((g^{-1}(w_{g_0} + a + w),0)).$$

4.2.2 Un autre modèle de la représentation de Weil

Soit (ρ_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique de H. Soit $g \in \mathrm{Sp}(W)$. Fixons une mesure de Haar μ_g sur l'espace vectoriel $W/\mathrm{Ker}(1-g)$. On vérifie que pour tout $s \in S$, la fonction $w \in W \mapsto \psi(\frac{<w,gw>}{2})\rho((1-g)w,0)s \in R$ est constante sur les classes modulo $\mathrm{Ker}(1-g)$.

Si F est fini, on définit $M[g]$ pour tout $s \in S$:

$$M[g]s = \int_{W/\mathrm{Ker}(1-g)} \psi(\frac{< w, gw >}{2})\rho_\psi((1-g)w,0))sd\mu_g w$$

Sinon, soit L un réseau de $W/\mathrm{Ker}(1-g)$. Pour $s \in S$, on définit un élément $M[g]s \in S$ par :

$$M[g]s = \int_L \psi(\frac{< w, gw >}{2})\rho_\psi((1-g)w,0))sd\mu_g w$$

Lemme 4.2.2.1. *Pour tout $s \in S$, M_Ls ne dépend pas de L au sens suivant : il existe un réseau $L_s \subset W/Ker(1-g)$, et un élément noté $Ms \in S$ tels que si L est un réseau de $W/Ker(1-g)$, si $L_s \subset L$, on a l'égalité $M_Ls = Ms$.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de [MVW87, Chap.2, Lem. II.2]. □

Ce lemme définit une application $M[g] : s \to Ms$ dont on vérifie qu'il est un endomorphisme. On obtient la propriété suivante :

Proposition 4.2.2.2. *Pour tout $g \in Sp(W)$ et et tout $h \in H$, on a l'égalité*

$$M[g]\rho_\psi(h) = \rho_\psi(g.h)M[g].$$

De plus il existe $c(g) \in R^\times$ tel que

$$M[g^{-1}].M[g] = c(g)Id_S.$$

On a donc $(g, M[g]) \in \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$.

Démonstration. On renvoie encore à la preuve de [MVW87, Chap.2, Lem. II.3 & Lem. II.4]. À noter que la non nullité de $c(g)$ provient du fait que cette quantité est exprimée comme la mesure d'un réseau de W. C'est donc une puissance de p, qui est bien inversible dans R par hypothèse. □

Lemme 4.2.2.3. *Soient $g_1, g_2 \in Sp(W)$. Supposons que $g_1g_2 = g_2g_1$. Alors :*

$$M[g_1]M[g_2] = M[g_2]M[g_1].$$

Démonstration. Une nouvelle fois, on renvoie à la preuve de [MVW87, Chap. 2, Lem. II.5]. Un changement de variables $w = g_1^{-1}w'$ est effectué et dont le jacobien vaut :

$$|\det(g_1^{-1}|_{W/\mathrm{Ker}(1-g_2)})| = |\det(g_1|_W)|^{-1}|\det(g_1|_{\mathrm{Ker}(1-g_2)}|.$$

Ce sont des puissances de p, donc des quantités bien définies dans R. Ensuite, le premier terme de droite vaut 1 car $g_1 \in \mathrm{Sp}(W)$. Un argument de [SS74, IV.2.] donne une description explicite du commutant de g_2, et le second terme de droite vaut alors 1 lui aussi. □

4.3 Propriétés du groupe métaplectique et de la représentation de Weil

Sections locales, ouvert trivialisant et scindages. On suppose que F est local non archimédien. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{Sp}(W)$, et $\widetilde{G}$ son image réciproque dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. On a une suite exacte :

$$1 \to R^\times \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1.$$

On dit que G est scindé dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ s'il existe un homomorphisme de groupes (continu) $\sigma : G \to \widetilde{G}$ qui scinde la suite ci-dessus. On dit alors que σ est un *scindage* de la suite exacte. Et dans ce cas, $\widetilde{G} \simeq G \times R^\times$ est une extension centrale triviale de G par R, et deux tels scindages diffèrent par un caractère (continu) $G \to R^\times$.

Les notions de sections locales et d'ouvert trivilisant sont définies dans la section 1.3. Le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est celui de la section 4.1. Les deux premiers points de la proposition suivante complètent la preuve du Théorème 4.1.0.6, on reprend donc librement les notations qui y étaient utilisées.

Proposition 4.3.0.4. *Soit (ρ_ψ, S) un modèle de la représentation métaplectique de $H(W)$. On a les faits suivants :*

[groupe topologique] *le groupe $\widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$ est un sous-groupe topologique de $Sp(W) \times GL(S)$;*

[ouvert trivialisant] *tout sous-groupe compact ouvert K de $Sp(W)$ qui stabilise un réseau autodual est un sous-groupe ouvert trivialisant de $p : \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W) \to Sp(W)$;*

[scindage canonique] *s'il existe un scindage canonique $G \to \widetilde{G}$ dans $\widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$ pour un modèle donné, alors il en existe également un dans $\widetilde{Sp}(W)$;*

[groupe dérivé] *le groupe dérivé de $\widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$ est $\widehat{Sp}_{\psi,S}(W)$, qui est l'unique extension centrale non triviale de $Sp(W)$ par $\{\pm 1\}$;*

[unicité du scindage] *tout sous-groupe parfait qui est scindé possède un unique scindage, et celui-ci est à valeurs dans $\widehat{Sp}_{\psi,S}(W)$.*

Démonstration. [groupe topologique] Tout d'abord, le morphisme de groupe $\Phi_{S,S'}$ de la Proposition 4.1.0.5 s'étend en un homéomorphisme de groupes :

$$(g, M) \in \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{GL}(S) \mapsto (g, \phi M \phi^{-1}) \in \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{GL}(S')$$

où les groupes linéaires sont munis de la topologie de la convergence simple (cf. Section 1.1). Le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est défini comme le produit fibré $\mathrm{Sp}(W) \times_{\mathrm{PGL(S)}} \mathrm{GL}(S) \subset \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{GL}(S)$. C'est un sous-groupe topologique à condition que le morphisme $\rho : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S)$ qui permet de le définir soit continu. Il suffit de prouver l'assertion pour un seul modèle S et d'utiliser ensuite l'homéomorphisme de groupes $\Phi_{S,S'}$. Le modèle latticiel de la Section 4.2.1 se révèle particulièrement pratique ici. On peut prendre K le stabilisateur d'un réseau auto-dual A et considérer $\rho : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{PGL}(S_A)$. Alors, un morphisme de groupes continu $\sigma : K \to \mathrm{GL}(S)$ qui relève $\rho|_K$ *i.e.* $\mathrm{red} \circ \sigma = \rho|_K$. C'est précisément celui donné par M dans la description du modèle latticiel, qui est une représentation lisse de K, donc défini un morphisme de groupes continu $K \to \mathrm{GL}(S)$. Ensuite, l'existence d'une telle application σ permet de construire une application $\sigma' : G \to \mathrm{GL}(S)$ telle que $\mathrm{red} \circ \sigma'$ est continue, et coïncide avec ρ. En effet, soit $(m_A)_{A \in G/K}$ un système de représentant dans G des classes à droite modulo K. Soit $r : G \to \mathrm{GL}(S)$ n'importe quelle application qui relève ρ. Alors pour tout $A \in G/K$, on définit σ' sur l'ouvert fermé $m_A K$ par $\sigma' : m_A k \to r(m_A)\sigma(k)$. Cette application est bien continue car elle l'est sur chacun des ouverts $m_A K$. Par construction, on a bien $\rho = \mathrm{red} \circ \sigma'$.

[ouvert trivialisant] D'après le preuve du point précédent, le modèle latticiel associé à un réseau auto-dual A fournit un morphisme de groupes continu $\sigma : K \to \mathrm{GL}(S)$ qui relève $\rho|_K$. Par propriété universelle du produit fibré, il existe un unique morphisme de groupes continu $\phi : K \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ correspondant à $K \to \mathrm{GL}(S)$ et $K \to G$. De plus, l'image de ϕ est ouverte dans le groupe métaplectique. En effet, $\phi(K)$ est l'intersection de deux ouverts : $p^{-1}(K)$ d'une part où $p : \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_A}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ est la première projection ; et l'image réciproque de l'ouvert $U_{1_A,1_A}$ par la seconde projection, où 1_A désigne l'indicatrice de A dans $C_c^\infty(W)$. Enfin, ϕ est un homéomorphisme de groupes sur son image et c'est une section (locale) de p. L'application ϕ induit donc un homéomorphisme de groupes :

$$(k, \lambda) \in K \times R^\times \to \phi(k).(1_{\mathrm{Sp}(W)}, \lambda) \in p^{-1}(K).$$

On termine en transportant à tout modèle S à l'aide de $\Phi_{S_A,S}$ (cf. Proposition 4.1.0.5).

[scindage canonique] Cela provient du Corollaire 4.1.0.7 qui identifie $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ et $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ canoniquement.

[groupe dérivée] Dans la preuve du Théorème 4.1, il est mentionné que [CT13] prouve l'existence d'un caractère $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W) \to R^\times$ dont le noyau $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est une extension centrale non triviale de $\mathrm{Sp}(W)$ par $\{\pm 1\}$. En particulier, le groupe dérivé de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ contient ce noyau. On conclut à l'aide du Corollaire 1.3.0.10 que $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ est parfait.

[unicité du scindage] Deux scindages σ_1 et σ_2 différent au plus d'un caractère de G. En effet ils induisent des automorphismes d'extensions centrales de $\widetilde{G}$ dans lui-même. Et comme G est parfait, cette automorphisme est l'identité, ce qui entraîne que σ_1 et σ_2 sont égaux. Enfin, les morphismes de groupes préservent les éléments dérivés au sens où, si $f : A \to B$ est un morphisme de groupes, alors $f([A, A]) \subset [B, B]$. Ainsi l'image de G par un scindage est contenue dans le groupe dérivé de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ *i.e.* dans le groupe métaplectique réduit $\widehat{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$. □

Corollaire 4.3.0.5. *Soit $\Phi = \{0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r\}$ un drapeau totalement isotrope dans W. Soit le sous-groupe $P_1(\Phi) \simeq GL(\Phi) \ltimes N(\Phi)$ de $P(\Phi)$, qui est le noyau de la projection sur le facteur unitaire $U(W^0)$ où $W = X_r + W^0 + X_r^*$. Il existe un scindage canonique $P_1(\Phi) \to \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$ où S est le modèle de Schrödinger (mixte si X_r n'est pas maximal) associé à la décomposition précédente de W. Tout autre scindage est donné par un caractère de $P_1(\Phi)$, et tout sous-groupe de $P_1(\Phi)$ est donc canoniquement scindé. Il existe un scindage $\sigma : N(\Phi) \to \widetilde{Sp}(W)$ normalisé par $P(\Phi)$. À l'exception du cas exceptionnel $Sp(W) = SL_2(\mathbb{F}_3)$, ce scindage est unique et à valeurs dans $\widehat{Sp}(W)$.*

Démonstration. On a une inclusion canonique $P(\Phi) \subset P(X_r)$. On va prouver la propriété seulement pour les paraboliques maximaux, ce qui suffira. En ce qui concerne le radical unipotent, c'est un groupe parfait, sauf dans le cas exceptionnel évoqué. Son scindage est donc unique si $P(\Phi)$ en possède un, et il est facile de voir qu'il est normalisé par $P(\Phi)$. L'existence du scindage canonique de $P(\Phi)$ provient des formules explicites liées au modèle de Schrödinger (mixte si X_r n'est pas maximal). □

Lissité, admissibilité et contragrédiente. La représentation de Weil ω_ψ est lisse et même admissible. Ces propriétés se remarquent en utilisant le modèle latticiel qui permet de le prouver avec le moins d'effort.

Proposition 4.3.0.6. *La représentation de Weil $(\omega_\psi, S) : \widetilde{Sp}(W) \to \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W) \to GL(S)$ est lisse, admissible. Et a pour contragrédiente $(\omega_{\psi^{-1}}, S)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 1.3.0.15, la représentation ω_ψ est lisse.

Pour prouver qu'elle est admissible, on utilise le modèle latticiel. On suppose que F est local non-archimédien. On choisit un réseau auto-dual A et on étend ψ trivialement à A. Par définition, $S_A = \natural - \mathrm{ind}_{A \times F}^{W \times F}(\psi_A)$. Soit K' un sous-groupe compact ouvert inclus dans le stabilisateur de A. Pour tout $f \in (S_A)^{K'} \subset C_c^\infty(W)$, soit L un réseau de W tel que :

— f soit bi-invariante sous L *i.e.* $f((l + w, 0)) = f((w, 0))$ pour tout $l \in L$ et $w \in W$;

— pour tout $k \in K'$ et tout $l \in L$, on a $\psi_A((k^{-1}l, 0)) = 1$.

On peut supposer que $L \subset A$ quitte à choisir le réseau $L \cap A$. On a alors pour tout $l \in L$, pour tout $k \in K'$ et tout $w \in W$:

$$\begin{aligned} f((w,0)) = f((w+l,0)) = f(k^{-1}(l+w,0)) &= f((k^{-1}l, \frac{1}{2} < k^{-1}w, k^{-1}l >)(k^{-1}w,0)) \\ &= \psi_A((k^{-1}l,0))\psi(\frac{1}{2} < w,l >)f(k^{-1}(w,0)) \\ &= \psi(\frac{1}{2} < w,l >)f((w,0)). \end{aligned}$$

Comme R est intègre et ψ est non-trivial, on en déduit que $\mathrm{supp}(f) \subset L^{\perp}$ (cf. Section 3.1.1). Donc l'espace vectoriel des vecteurs fixes sous K' est au plus de dimension $|(A \times F)\backslash(L^{\perp} \times F)/K'|$.

Pour terminer, la contragrédiente de ω_ψ est $\omega_{\psi^{-1}}$ en utilisant l'identification des représentations métaplectiques $((\rho_\psi)^\vee, S^\vee) \simeq (\rho_{\psi^{-1}}, S)$ de la Proposition 3.2.0.1. □

Propriétés héritées de la représentation métaplectique. Les propriétés de la suite proviennent de la Proposition 3.2.0.1 sur la représentation métaplectique. On reprend librement les notations qui y étaient adoptées.

Proposition 4.3.0.7. *On a les faits suivants :*

[influence de $<,>$] *si $a \in F^\times$, la représentation de Weil associée à l'espace vectoriel symplectique $(W, a<,>)$ et au caractère ψ coïncide avec la représentation de Weil associé à l'espace symplectique $(W,<,>)$ et au caractère $a.\psi$;*

[somme orthogonale] *si $W = W_1 \oplus W_2$ est une somme orthogonale, il existe un unique (resp. canonique, dans le cas exceptionnel) morphisme de groupes :*

$$\widetilde{Sp}_{\psi,S_1}(W_1) \times \widetilde{Sp}_{\psi,S_2}(W_2) \to \widetilde{Sp}_{\psi,S}(W)$$

qui relève le plongement $Sp(W_1) \times Sp(W_2) \to Sp(W)$ et commute aux projections. Son noyau est $R^\times$ plongé anti-diagonalement i.e. $\{((1_{Sp(W_1)}, \lambda), (1_{Sp(W_2)}, \lambda^{-1})) \mid \lambda \in R^\times\}$;

[influence de ψ] *si b est un carré, $\omega_{b.\psi}$ est équivalente à ω_ψ.*

Démonstration. [influence de $<,>$] Ceci provient du point de la Proposition 3.2.0.1 correspondant.

[somme orthogonale] Soient W_1, W_2 deux espaces symplectiques, et $W = W_1 \oplus W_2$ leur somme orthogonale. Pour $i \in \{1,2\}$, on note S_i un modèle de la représentation métaplectique $H(W_i,<,>)$. Un modèle de la représentation métaplectique de $H(W,<,>)$ est alors $S = S_1 \otimes S_2$ (cf. Proposition 3.2.0.1). On a un plongement $\mathrm{Sp}(W_1) \times \mathrm{Sp}(W_2) \to \mathrm{Sp}(W)$, et un homomorphisme $\mathrm{GL}(S_1) \times \mathrm{GL}(S_2) \to \mathrm{GL}(S)$ de noyau l'ensemble $\{(t\mathrm{Id}_{S_1}, t^{-1}\mathrm{Id}_{S_2}) \mid t \in R^\times\}$. D'où un homomorphisme :

$$(\mathrm{Sp}(W_1) \times \mathrm{GL}(S_1)) \times (\mathrm{Sp}(W_2) \times \mathrm{GL}(S_2)) \to \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{GL}(S).$$

L'image de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W_1) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W_2)$ par cet homomorphisme est incluse dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$. En d'autres termes, il existe un homomorphisme (unique en dehors du cas exceptionnel) :

$$j : \widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W_1) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W_2) \to \widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$$

de noyau $R^\times$ plongé antidiagonalement dans le produit de gauche, commutant avec les projections sur les groupes symplectiques, et équivariant pour l'action de $R^\times$. La représentation $\omega_\psi \circ j$ est équivalente au produit tensoriel externe $\omega_{\psi,1} \otimes \omega_{\psi,2}$, avec une notation évidente.

[influence de ψ] On montre un résultat plus général qui concerne le groupe des similitudes symplectiques $\mathrm{GSp}(W)$, qui agit sur H via $\gamma.(w,t) = (\gamma w, \mathrm{N}(\gamma)t)$. L'application $h \mapsto \rho_\psi(\gamma.h)$ est une réalisation de $\rho_{\mathrm{N}(\gamma).\psi}$ dans S. On a alors $(\gamma^{-1}g\gamma, M) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\mathrm{N}(\gamma).\psi,S}(W)$ et $(g,M) \mapsto (\gamma^{-1}g\gamma, M)$ est un isomorphisme de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ sur $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\mathrm{N}(\gamma).\psi,S}(W)$. Ce n'est a priori pas un isomorphisme d'extension centrale puisqu'il ne couvre pas forcément l'identité sur $\mathrm{Sp}(W)$. On obtient qu'il existe un unique automorphisme (excepté dans le cas exceptionnel) de $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W)$ relevant la conjugaison par γ, qu'on note encore $\gamma : \widetilde{g} \mapsto \gamma^{-1} \widetilde{g} \gamma$. Les représentations du groupe métaplectique $\widetilde{g} \mapsto \omega_{\mathrm{N}(\gamma).\psi}(\gamma^{-1} \widetilde{g} \gamma)$ et ω_ψ sont équivalentes. En prenant $a \in F^\times$ et $\gamma = a \, \mathrm{Id}_W \in \mathrm{GSp}(W)$, on obtient l'équivalence de $\omega_{N(\gamma).\psi}$ et ω_ψ, où $N(\gamma) = a^2$. □

4.4 Expression du cocycle métaplectique

On suit ici de très près l'article de [Per81], qui, combiné à [CT13], permet de récupérer les constructions des opérateurs d'entrelacement et la formule du cocycle que l'on va présenter ici. Soit F un corps local non-archimédien de caractéristique différente de 2 et de cardinal résiduel q. On continue de noter p sa caractéristique résiduelle. On rappelle qu'en début de section a été fixé un choix de racine carrée de p dans R. Cela détermine une racine carrée de q dans R sans ambiguïté.

Définition 4.4.0.8. Soit X et Y deux lagrangiens de W. L'isomorphisme $x \mapsto (y \mapsto < x, y >)$ de W sur W^*, restreint à X, induit un isomorphisme de $X/X \cap Y$ sur $(Y/X \cap Y)^*$ noté A_{YX}.

Soient dx et dy des mesures de Haar sur X et Y, deux lagrangiens de W. Prenons une mesure de Haar quelconque sur $X \cap Y$ notée dt ; d'où des mesures quotients $d\dot{x}$ et $d\dot{y}$ sur $X/X \cap Y$ et $Y/X \cap Y$. Notons $|A_{YX}|$ (c'est une puissance de q !) le module de A_{YX} vis à vis de $d\dot{x}$ et de la mesure duale de $d\dot{y}$ vis-à-vis de ψ (cf. Annexe A.1.2). Alors l'expression $|A_{YX}|^{\frac{1}{2}} d\dot{y}$ ne dépend pas de la mesure dt choisie sur $X \cap Y$ et on a une reformulation de la Proposition 3.3.0.2 :

Proposition 4.4.0.9. *L'opérateur*

$$\mathcal{F}_{YX}(f)(h) = \int_{Y/X\cap Y} f((y,0)h)|A_{YX}|^{\frac{1}{2}} d\dot{y}$$

défini sur les éléments de S_X entrelace les modèles de Schröndinger S_X et S_Y. De plus,

$$\mathcal{F}_{YX}^{-1} = \mathcal{F}_{XY}.$$

Démonstration. La preuve fonctionne exactement comme celle de [Per81, Prop. 1.2]. L'existence de mesure auto-duale provient du choix d'une racine carrée de q. □

Remarque 4.4.0.10. Remarquons également que l'opérateur $\mathcal{F}_{YX}$ est simplement l'opérateur $I_{A_1,A_2,\mu_{X,Y},0}$ de la section 3.3, où $A_1 = X$ et $A_2 = Y$ pour la mesure $\mu = |A_{YX}|^{\frac{1}{2}} d\dot{y}$.

Remarque 4.4.0.11. Prenons garde au fait que $\mathcal{F}_{X,X}$ n'est pas l'identité mais dépend du choix des mesures dx et dy faites sur X et… X ! Sauf mention du contraire, quand un même lagrangien apparaît plusieurs fois dans une expression, on considérera que la mesure choisie est toujours la même.

On cherche alors à connaître les règles de composition de ces opérateurs. Cela nécessite des résultats de [Wei64] qui ont été généralisés par [CT13]. Avec leurs notations, il suffit d'évaluer en $x^* = 0$ leur [CT13, Prop. 3.3] pour obtenir :

Proposition 4.4.0.12. *Soit X_0 un F-espace vectoriel de dimension finie et Q une forme quadratique non dégénérée sur X_0. On note ρ l'endomorphisme symétrique associé au caractère du second degré $\psi \circ Q : x \mapsto \psi(Q(x))$. Il existe un élément de $R^\times$ noté $\omega(\psi \circ Q)$ tel que l'on ait pour tout $f \in C_c^\infty(X_0)$:*

$$\int_{X_0} \int_{X_0} f(y-x)\psi(Q(x))dxdy = \omega(\psi \circ Q)|\rho|^{-\frac{1}{2}} \int_{X_0} f(x)dx$$

où $|\rho|$ est le module de $\rho : x \in X_0 \mapsto \rho(x) \in X_0^*$ avec $\rho(x) : u \mapsto \rho(x)(u) = Q(x+u) - Q(x) - Q(u)$ et la mesure de sur X_0^* est la mesure duale vis-à-vis de ψ de la mesure sur X_0.

Si Q est dégénérée, on notera $\omega(\psi \circ Q)$ le scalaire correspondant à la forme quadratique induite sur $X_0/\ker(Q)$. On convient que $\omega(0) = 1$. Le scalaire en question est le facteur de Weil qui vérifie toutes les identités bien connues – que l'on ne rappelle pas ici. On renvoie à [CT13, §3] pour ces propriétés. Perrin fait un choix de convention, devenu non-standard par la suite, en définissant le facteur de Weil de Q comme celui de $\frac{1}{2}Q$, principalement pour ne pas avoir un facteur $\frac{1}{2}$ dans ses expressions plus loin. Nous ne suivons pas son choix car, partout ailleurs dans la littérature, ce facteur apparaît. Ainsi, le [Per81, Th. 1.4.] reste valable :

Théorème 4.4.0.13. *Soient X_1, X_2 et X_3 trois lagrangiens de W, munis de mesures de Haar quelconques. On leur associe la forme quadratique $Q(X_1, X_2, X_3) = Q_{123}$ définie sur l'espace $X_1 \times X_2 \times X_3$ par*

$$Q_{123}(x_1, x_2, x_3) =< x_1, x_2 > + < x_2, x_3 > + < x_3, x_1 > .$$

Alors :

$$\mathcal{F}_{X_1X_2} \circ \mathcal{F}_{X_2X_3} = \omega\Big(\psi \circ (\frac{1}{2}\ Q(X_1, X_2, X_3))\Big)\mathcal{F}_{X_1X_3}.$$

Démonstration. Les calculs explicites d'intégrales effectués par [Per81] restent valables grâce à la proposition clé précédente [CT13, 3.3.]. Le seul fait délicat concerne les changements de mesure pratiquées dans les intégrales, examinons ceci de plus près. Comme dans la preuve de Perrin, il suffit d'étudier le cas où X_1 est est transverse à X_2 et X_3.

$$\begin{aligned} F_{X_1X_2} \circ \mathcal{F}_{X_1X_2} &= \int_{X_1} \Big(\int_{X_2 \cap X_3 \backslash X_2} f((y,0)(x_1,0))|A_{X_2X_3}|^{\frac{1}{2}}dy \Big) |A_{X_1X_2}|^{\frac{1}{2}}dx_1 \\ &= \int_{X_1} \Big(\int_{X_2 \cap X_3 \backslash X_2} \psi(-\frac{1}{2} < \pi_3 y, \pi_1 y >) f((\pi_1 y + x_1, 0)) \ \times \\ &\qquad\qquad |A_{X_2X_3}|^{\frac{1}{2}}dy \Big) |A_{X_1X_2}|^{\frac{1}{2}}dx_1 \end{aligned}$$

où $\pi_1 \oplus \pi_3$ est la décomposition en projecteur vis-à-vis de $X_1 \oplus X_3$. Or, on a $\pi_1 : X_2 \to X_1$ qui se factorise en $X_2 \cap X_3 \backslash X_2 \to X_1$, on note alors $\widetilde{\pi}_1$ la bijection réalisé sur son image. Soit W' un complémentaire de $\mathrm{Im}(\pi_1)$ dans X_1. L'intégrale se réécrit alors par changement de variable :

$$\int_{W'} \Big(\int_{X_2 \cap X_3 \backslash X_2} \int_{X_2 \cap X_3 \backslash X_2} \psi(-\frac{1}{2} < \pi_3 y, \pi_1 y >) f((\pi_1 y + y' + w', 0)) \times \\ |A_{X_2X_3}|^{\frac{1}{2}} dy| \, \widetilde{\pi}_1 \, |^{-1} dy' \Big) |A_{X_1X_2}|^{\frac{1}{2}} dw'$$

et en utilisant la proposition précédente, on obtient :

$$\int_{W'} \Big(\omega(\psi \circ Q) |\rho|^{-\frac{1}{2}} \int_{X_2 \cap X_3 \backslash X_2} f((y + w', 0)) |A_{X_2X_3}|^{\frac{1}{2}} | \, \widetilde{\pi}_1 \, |^{-1} dy \Big) |A_{X_1X_2}|^{\frac{1}{2}} dw'$$

où Q est la forme quadratique $y \mapsto -\frac{1}{2} < \pi_1 y, \pi_3 y >$ sur $X_2 \cap X_3 \backslash X_2$. Enfin, il reste à montrer que :

$$\omega(\psi \circ Q) |A_{X_2X_3}|^{\frac{1}{2}} |A_{X_1X_2}|^{\frac{1}{2}} |\rho|^{-\frac{1}{2}} \int_{X_1} f((x_1, 0)) dx_1 = \omega(\psi \circ Q) \mathcal{F}_{X_1X_3} f(0)$$

c'est-à-dire que :

$$|A_{X_2X_3}|^{\frac{1}{2}} |A_{X_1X_2}|^{\frac{1}{2}} |\rho|^{-\frac{1}{2}} = |A_{X_1X_3}|^{\frac{1}{2}}$$

Or on peut réécrire $A_{X_1X_3}$ comme la composée :

$$X_3 \simeq (X_2 \cap X_3) \times (X_2 \cap X_3 \backslash X_3) \overset{1 \times A_{X_2X_3}}{\longrightarrow} (X_2 \cap X_3) \times (X_2 \cap X_3 \backslash X_2)^* \overset{1 \times \rho^{-1}}{\longrightarrow} \\ (X_2 \cap X_3) \times (X_2 \cap X_3 \backslash X_2) \simeq X_2$$

et composer enfin avec $A_{X_1X_2} : X_2 \to X_1^*$. Ceci donne l'égalité recherchée. $\square$

Lien avec la représentation de Weil. Soit maintenant X_0 un lagrangien de W, (ρ_ψ, S_{X_0}) le modèle de Schrödinger associé à X_0 et ψ (où ψ est étendue trivialement à X_0). On fixe une mesure de Haar μ_0 sur X_0, ainsi qu'une polarisation complète $W = X_0 + X_0^*$. Ainsi, S_{X_0} s'identifie à $\mathcal{S}(X_0^*)$. Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ agit sur les espaces vectoriels S_X via l'application I_g définie par :

$$\begin{array}{ccc} S_X & \to & S_{gX} \\ f & \mapsto & g.f \end{array}$$

où, rappelons le, $g.f : h = (w, t) \mapsto f(g^{-1}.h) = f((g^{-1}w, t))$. On choisit comme mesure sur gX_0 celle de X_0 transportée par l'isomorphisme g *i.e.* la mesure μ_g qui à tout compact ouvert K de gX_0 associe $\mu_g(K) = \mu_0(g^{-1}K)$. Ainsi, on a la relation suivante en notant $r(g) = I_g \circ \mathcal{F}_{g^{-1}X_0, X_0} = \mathcal{F}_{X_0, gX_0} \circ I_g$:

$$\rho_\psi^g \; r(g) = r(g) \; \rho_\psi.$$

En d'autres termes, $g \mapsto (g, r(g))$ est une section – qui est donnée de manière explicite ! – de $\mathrm{Sp}(W)$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}_\psi(W)$. On connaît de plus le 2-cocycle qui lui est associé via la relation héritée du théorème précédent.

Proposition 4.4.0.14. *Soient g_1 et g_2 deux éléments de $Sp(W)$, alors :*

$$r(g_1)r(g_2) = \omega\Big(\psi \circ (\frac{1}{2}\ Q(X_0, g_1X_0, g_1g_2X_0))\Big)\ r(g_1g_2).$$

Démonstration. Provient du théorème précédent et de la commutativité du diagramme.

$$\begin{tikzcd} S_{X_0} \arrow[r, "I_g"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{g^{-1}X_0,X_0}"'] & S_{gX_0} \arrow[d, "\mathcal{F}_{X_0,gX_0}"] \\ S_{g^{-1}X_0} \arrow[r, "I_g"] & S_{X_0} \end{tikzcd}$$

□

Et on a également une expression explicite des opérateurs $r(g)$:

Proposition 4.4.0.15. *Soit $\Phi \in S_{X_0}$. Soit $W = X_0 + X_0^*$ la polarisation complète précédente. On note $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ un élément de $Sp(W)$ vis-à-vis de cette polarisation et dont $g^{-1} = \begin{bmatrix} d^* & b^* \\ c^* & a^* \end{bmatrix}$ est l'inverse. La notation $w = x + y$ désigne les coordonnées évidentes selon cette décomposition. On rappelle que la restriction de S_{X_0} à $C_c^\infty(X_0^*)$ est un isomorphisme.*

- *Si c est nul, $r(g)$ est l'opérateur qui à Φ associe la fonction :*

$$r(g)\Phi((y,0)) = |a^*|^{\frac{1}{2}}\psi(\frac{1}{2} < a^*y, b^*y >)\Phi((a^*y,0));$$

- *Si c est non nul, on désigne par $(c^*)'$ l'isomorphisme induit par c^* de $X_0/\ker(c^*)$ vers $(X_0/d^*(\ker(c^*)))^*$, et l'opérateur $r(g)$ associe à Φ la fonction :*

$$r(g)\Phi((y,0)) =$$
$$\int_{X_0/Ker(c^*)} \psi(\frac{< a^*y, b^*y >}{2} + < c^*x, b^*y > + \frac{< c^*x, d^*x >}{2})\Phi((a^*y + c^*x, 0))|(c^*)'|^{\frac{1}{2}} d\dot{x}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire explicitement l'expression de l'opérateur $I_g \circ \mathcal{F}_{g^{-1}X_0,X_0}$. La discussion préliminaire [Per81, 2.1.3.] concernant le module $|A_{X_0,X}|$ s'applique ici de la même manière en considérant $X = g^{-1}X_0$ et c^* en lieu et place de $X = X_0g$ et c. □

Expression du cocyle métaplectique. Avec tous ces ingrédients, on peut donner une expression explicite du cocycle métaplectique. Le théorème suivant donne une réduction du 2-cocycle

$$c_{X_0}(g_1, g_2) = \omega\Big(\psi \circ (\frac{1}{2}\ Q(X_0, g_1X_0, g_1g_2X_0))\Big) = \omega\Big(\psi \circ (\frac{1}{2}\ Q(g_1^{-1}X_0, X_0, g_2X_0))\Big)$$

obtenu à l'aide de l'expression des $r(g)$. En effet, on a une résolution du carré de ce 2-cocyle – c'est l'objet du théorème 1.6. de [Per81]. Notons $\omega(\alpha)$ le facteur de Weil associé au caractère du second degré $x \mapsto \psi(\alpha x^2)$. L'élément $\omega(\alpha)$ ne dépénd que de la classe de α modulo $F^{\times 2}$. Posons :

$$t_{\mathrm{Per}}(g) = \begin{cases} \omega(\frac{1}{2})\ \omega(-\frac{1}{2}\det(d^*)) & \text{si } g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ \\ \varepsilon({}^t a^* c^*)\ \omega(\frac{1}{2})^{1-\mathrm{rg}(c^*)}\omega(-\frac{1}{2}D(c^{*\prime})) & \text{si } g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{cases}$$

où ε est l'invariant de Hasse attaché à l'endomorphisme symétrique ${}^t a^* c^*$.

Théorème 4.4.0.16. *On a alors un isomorphisme de groupes :*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Sp(W)} & \xrightarrow{\sim} & \widehat{Sp_{\psi,S_{X_0}}}(W) \\ (g,\eta) & \longmapsto & (g, \eta\ t_{Per}(g)\ r(g)) \end{array}$$

Autre expression du cocycle. Les lemmes de [RR93, §2.] concernent la géométrie du groupe symplectique, ceux-ci peuvent donc être réutilisés librement. Il n'est pas nécessaire d'examiner en détail la preuve de [RR93], mais seulement de prouver que le 2-cocycle qu'il obtient est identique au c_{X_0} que nous venons d'obtenir grâce aux méthodes de [Per81]. Pour définir le 2-cocyle à la Rao, nous avons besoin de la notion d'invariant de Leray (cf. Définition 2.4), qu'on notera L_F car l'espace ε-hermitien W considéré est simplement un espace symplectique sur F. On continue avec la même notation où X_0 désigne un lagrangien de W.

Théorème 4.4.0.17. *Soit $g_1, g_2 \in Sp(W)$. On a :*

$$c_{X_0}(g_1, g_2) = \omega\Big(\psi \circ (\frac{1}{2} < x, \rho.x >)\Big)$$

où ρ est la classe d'isométrie donnée par l'invariant de Leray de $L_F(X_0, g_2X_0, g_1^{-1}X_0)$.

Démonstration. Montrons donc que $\omega(\psi \circ (\frac{1}{2}\ Q(g_1^{-1}X_0, X_0, g_2X_0))) = \omega(\psi \circ (\frac{1}{2} < x, \rho.x >))$. Soient X_1, X_2, X_3 trois lagrangiens transverses deux à deux. Le lemme [Per81, 1.4.2.] donne l'égalité entre les facteurs de Weil de $\psi \circ (\frac{1}{2}Q(X_1, X_2, X_3))$ et du caractère du second degré défini sur X_2 par $\psi(\frac{1}{2}q(x_2)) = \psi(\frac{1}{2} < \pi_1 x_2, x_2 >)$ où π_1 est la projection sur X_1 vis-à-vis de $X_1 \oplus X_3$. Or, on a $x_2 \in X_2 \mapsto x_2 - \pi_1(x_2) \in X_3$ et donc $u = \mathrm{Id}_W - \pi_1$ *i.e.* $\rho = -\pi_1$ sur X_2. Enfin, quitte à quotienter, on peut toujours se ramener au cas de lagrangiens transverses deux à deux. □

De même, [RR93] donne des sections pour obtenir un cocycle métaplectique réduit, c'est-à-dire à valeurs dans $\{\pm 1\}$. On redirige vers la section 2.4 pour les notations employées. Pour le même lagrangien X_0 de W, on rappelle la définition des doubles classes $\Omega_j = \{g \in \mathrm{Sp}(W) \mid \mathrm{rg}(c) = j\} = P(X_0)\tau_j P(X_0)$ où $0 \leq j \leq n$ et $\tau_j \in \mathrm{Sp}(W)$ sont des représentants bien choisis. On pose $x(g) = \det_{X_0}(p_1p_2) \bmod F^{\times 2}$ si $g = p_1\tau_j p_2$, et $t_{\mathrm{Rao}}(g) = \omega(\frac{1}{2}x(g))^{-1}\omega(\frac{1}{2})^{1-j}$ si $g \in \Omega_j$ [RR93, 5.2.]. Les sections t_{Per} et t_{Rao} différent au plus d'un facteur ± 1 en chaque élément. On peut prouver facilement que t_{Rao} et t_{Per} sont égaux sur $P(X_0) = \Omega_0$. En effet, pour $g \in P(X_0)$, on a $x(g) = \det(d)$ et $\det(d^*) = (\det(d))^{-1} = \det(d)\det(d)^{-2}$. En se rappelant que le facteur de Weil $\omega(\alpha)$ ne dépend que de la classe de α modulo les carrés, on obtient $\omega(-\frac{1}{2}\det(d^*)) = \omega(\frac{1}{2}\det(d))^{-1}$. Et donc $t_{\mathrm{Per}} = t_{\mathrm{Rao}}$ sur $P(X_0)$.

Remarque 4.4.0.18. Il faut faire attention au fait que, même si le 2-cocycle c_{X_0} est trivial sur $P(X_0)$, le cocycle réduit ne l'est pas : le 2-cobord défini par les sections t n'est pas trivial sur $P(X_0)$.

4.5 Restriction de la représentation de Weil aux paires duales

On aimerait restreindre la représentation de Weil ω_ψ de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ à des paires duales de $\mathrm{Sp}(W)$. Ces paires sont défininés dans la Section 2.3. Soit (H_1, H_2) une paire duale de $\mathrm{Sp}(W)$ et $p : \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \to \mathrm{Sp}(W)$ la projection associée à l'extension centrale $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}$ de $\mathrm{Sp}(W)$ par $R^\times$ (cf. Définition 1.3.0.12). On note $\widetilde{H_1}$ et $\widetilde{H_2}$ les images réciproques de H_1 et H_2 par p. Le Lemme 4.2.2.3 entraine que :

Proposition 4.5.0.19. *Le couple $(\widetilde{H_1}, \widetilde{H_2})$ est une paire duale dans $\widetilde{Sp}(W)$, au sens où le commutant de $\widetilde{H_1}$ dans $\widetilde{Sp}(W)$ est $\widetilde{H_2}$, et vice versa.*

On dit que ces deux groupes $\widetilde{H_1}$ et $\widetilde{H_2}$ sont des *relevés de paires duales.* Il est loisible de restreindre la représentation de Weil à $\widetilde{H_1} \times \widetilde{H_2}$ d'après la Proposition 4.5.0.19. L'enjeu est de déterminer si l'on peut maintenant la restreindre à H_1 et H_2. Pour ce faire, il s'agit de savoir si les relevés de notre paire duale contiennent H_1 et H_2. En d'autres termes, la question à laquelle nous voulons répondre est la suivante (la notion de scindage est défini en début de Section 4.3) : le relevé $\widetilde{H_1}$ (resp. $\widetilde{H_2}$) du groupe H_1 (resp. H_2) est-il scindé sur H_1 (resp. H_2) ? Malheureusement, la réponse est non en général. Le Théorème 4.5.1.5 fournira une réponse en ce sens en distinguant les différents cas. De plus, quand la représentation de Weil se restreint en une représentation de $H_1 \times H_2$, cela nécessite de systématiquement spécifier les scindages $H_i \to \widetilde{H_i}$ dont on se dote. On finit cette partie en donnant les formules explicites de la représentation de Weil restreintes aux relevés des paires duales, et dans le cas les plus favorables, aux paires duales elles-même.

4.5.1 Scindage des relevés de paires duales

Scindage. Un résultat utilisé sans cesse pour les relevés des paires métaplectiques est le suivant : si H se plonge dans un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(W)$ qui est scindé dans $\mathrm{Sp}(W)$, alors $\widetilde{H}$ est scindé. Donnons une illustration de ce fait qui est souvent utilisé de manière implicite pour qui est familier de ces questions. Les notations pour les paraboliques maximaux $P(X)$ et le vocabulaire pour les espaces ε-hermitien sont repris de la Section 2.1.

Lemme 4.5.1.1. *Soit H un sous-groupe de $Sp(W)$. S'il existe un sous-espace totalement isotrope X de W tel que H soit contenu dans $GL(X) \ltimes N(X) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \subset P(X)$, alors $\widetilde{H}$ est scindé.*

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du Corollaire 4.3.0.5. □

Etant donné le théorème de classification des paires duales de $\mathrm{Sp}(W)$, on en déduit comme corollaire :

Corollaire 4.5.1.2. *Les paires duales de type II sont scindées. Pour toute paire duale $(U(W_1), U(W_2))$ de type I, si W_2 est scindé, alors $\widetilde{U(W_1)}$ est scindé dans $\widetilde{Sp}(W_1 \otimes W_2)$.*

On va améliorer ce corollaire à l'aide des résultats de [Kud94]. Avant de présenter le contexte, on explique comment se ramener au cas des paires duales qui ne proviennent pas de restriction des scalaires d'une extension F' de F (cf. Définition 2.3.0.31). Comme dans [MVW87, Chap. 3, Lem. I.1], on a :

Lemme 4.5.1.3. *Une paire duale dans $\widetilde{Sp}_{\psi_{F'}}(W_{F'})$ est scindée si et seulement si la paire duale associée par restriction des scalaires à $t_{F'/F} \in Hom_{F'}(F', F)$ dans $\widetilde{Sp}_{\psi}(W)$ est scindée.*

Cette réduction permet de se concentrer sur les paires duales irréductibles ne provenant pas de restriction des scalaires. La Proposition 2.3.0.30 assure qu'il une décomposition en produit tensoriel hermitien $W = W_1 \otimes_D W_2$ telle que $H_1 = U(W_1)$ et $H_2 = U(W_2)$, où (D, τ) est un corps à involution de centre E et dont le corps des éléments fixes sous τ est F. On note enfin i le plongement :

$$i : (u_1, u_2) \in U(W_1) \times U(W_2) \mapsto u_1 \otimes u_2 \in \mathrm{Sp}(W).$$

Quand F est local non-archimédien, d'après les tableaux récapitulatifs de la Section 2.3, les possibilités pour (D, E, F, τ) sont :

1. $D = E = F$ et $\tau = \mathrm{Id}_F$;
2. D est l'unique corps de quaternions sur $E = F$ muni de son involution canonique τ ;
3. $D = E$ est une extension quadratique de F et τ est l'élément non-trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$.

Dans le cas où l'espace W_1 est scindé, et que l'extension $\widetilde{H_1}$ l'est aussi, [Kud94] donne un scindage explicite $H_1 \to \widetilde{H_1}$. Il définit l'invariant de Leray généralisé L_D pour les espaces ε-hermitien scindés (cf. Définition 2.4.0.33). Il prouve ensuite l'égalité entre $L_D(X_1 \otimes W_2, X_2 \otimes W_2, X_3 \otimes W_2)$ et la classe d'isométrie de l'espace quadratique $L_D(X_1, X_2, X_3) \otimes W_2$. Les invariants de cet espace quadratique sont donnés explicitement en fonction de ceux de $L_D(X_1, X_2, X_3)$ [Kud94, §2]. Cela permet alors de calculer explicitement les facteurs de Weil qui interviennent, puis de déterminer une résolution – explicite elle aussi – du cocycle métaplectique $c_{X_0 \otimes W_2}$ si $X_0 \in \Omega(W_1)$. Avant de revenir sur ses arguments, remarquons que ceci traite le cas où W_1 est scindé. On se ramène ensuite à ce cas par une procédure qui consiste à remplacer W_1 par l'espace scindé double $W_1 \oplus (-W_1)$.

Remarque 4.5.1.4. Pour rappel dans les cas 1 et 2, on a toujours $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Et les espaces hermitiens ($\varepsilon = 1$) ne sont jamais isométriques aux espaces anti-hermitiens ($\varepsilon = -1$). Enfin dans le cas 3, il existe une identification entre les espaces ε-hermitien et les espaces hermitiens ($\varepsilon = 1$). Seulement, cette identification n'est pas canonique. On suit les conventions de [Kud94] en considérant partout $\varepsilon = \pm 1$.

Soit $\varepsilon = \pm 1$. On suppose que W_1 est un espace $(-\varepsilon)$-hermitien scindé de dimension n_1 sur D. En notant m_1 son indice de Witt, on a donc $n_1 = 2m_1$. De même, n_2 désignera la dimension de W_2. Soit $X_0 \in \Omega(W_1)$, alors $X_0 \otimes W_2 \in \Omega(W)$. On note $P = P(X_0) \subset U(W_1)$. Par un choix adapté à X_0 d'une base de W_1, on peut considérer qu'on a $W_1 \simeq D^{2m_1}$ (vecteurs colonnes). Ce D-espace vectoriel à droite est muni de la forme $(-\varepsilon)$-hermitienne :

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >_1 = {}^t x_1 . y_2^\tau - \varepsilon {}^t y_1 . x_2^\tau$$

et son groupe d'isométrie est :

$$U(W_1) = \{ g \in \mathrm{GL}_{2m_1}(D) \mid \ < gw, gw' >_1 = < w, w' >_1, \forall w, w' \in W_1 \}.$$

En particulier W_1 admet une polarisation complète $W_1 = X_1 + Y_1$, avec $X_1 = \{(x,0) \mid x \in D^{n_1}\}$ identifié à X_0 et $Y_1 = \{(0,y) \mid y \in D^{n_1}\}$ identifié à son dual. Pour rappel, $W = W_1 \otimes_D W_2$ est un espace vectoriel symplectique de dimension $n_1 n_2 d$ muni du produit $<<,>>= \kappa\ t_{D/F}(<,>_1\ .\ <,>_2^\tau)$ où $\kappa = 1$ si $D = F$ et $\kappa = \frac{1}{2}$ sinon. On distingue de nouveaux cas 1_ε, 2_ε, 3_ε selon les valeurs de ε. Dans le cas 3 avec $E = F(\delta)$ et $\delta^2 = \Delta \in F^\times$, on choisit un caractère ξ de $E^\times$ dont la restriction à $F^\times$ est $(x, \Delta)_F^{n_2}$, qui est une puissance du caractère quadratique de l'extension E/F. Enfin, on note RW_2 l'espace quadratique $\big(W_2, \frac{1}{2} t_{E/F}(<,>_2)\big)$ dans le cas 3_+, et l'espace quadratique RW_2' est $\big(W_2, \frac{1}{2} t_{E/F}(\delta <,>_2)\big)$ dans le cas 3_-.

Théorème 4.5.1.5. *Pour $g \in P\tau_j P \subset U(W_1)$ dans la $j$ème cellule, on définit :*

$$\beta_{W_2}(g) = \begin{cases} \omega(\frac{1}{2}x(g))^{-n_2}\ \omega(\frac{1}{2})^{n_2}\ (x(g), \det(W_2))_F\ \omega(\psi \circ (\frac{1}{2} q_{W_2}))^{-j} & \textit{pour } 1_+ \\ 1 & \textit{pour } 1_- \\ (-1)^{n_2 j} & \textit{pour } 2_+ \\ ((-1)^{n_2} \det(W_2), x(g))_F\ (-1, \det(W_2))_F^j\ h_F(D)^{n_2 j} & \textit{pour } 2_- \\ \xi(x(g))\ \omega(\frac{1}{2} RW_2)^{-j} & \textit{pour } 3_+ \\ \xi(x(g))\ \xi(\delta)^j\ \omega(\frac{1}{2} RW_2')^{-j} & \textit{pour } 3_- \end{cases}$$

Alors si on exclut le cas 1_+ avec n_2 impair, le 2-cocyle $c_{X_0 \otimes W_2}\ (\partial \beta_{W_2})^{-1}$ est trivial sur $i(U(W_1))$. En d'autres termes, la classe du cocycle métaplectique dans $H^2(U(W_1), R^\times)$ est la classe triviale.

Démonstration. La preuve du théorème est identique à la preuve de [Kud94, Th. 3.1], et provient des propriétés arithmétiques des facteurs de Weil et des symboles de Hilbert. □

Donnons un corollaire immédiat qui traite le cas W_1 scindé :

Corollaire 4.5.1.6. *On suppose que W_1 est scindé. Excepté dans le 1_+ avec n_2 impair, auquel cas $\widetilde{U}(W_1)$ est le groupe métaplectique $\widetilde{Sp}(W_1)$, l'extension $\widetilde{U}(W_1)$ est scindée dans $\widetilde{Sp}(W)$. De plus, un scindage explicite est donné par :*

$$\iota_{W_2} : g \in U(W_1) \mapsto (g \otimes 1, \beta_{W_2}(g)) \in \widetilde{Sp}(W)$$

où $W = W_1 \otimes_D W_2$ est une décomposition en produit tensoriel hermitien et la réalisation de $\widetilde{Sp}(W)$ est donnée, pour $g_1, g_2 \in Sp(W)$, par le 2-cocyle :

$$c_{X_0 \otimes W_2}(g_1, g_2) = \omega\Big(\psi \circ (\frac{1}{2} L(X_0 \otimes W_2, g_2(X_0 \otimes W_2), g_1^{-1}(X_0 \otimes W_2)))\Big).$$

Conformément à [Kud94], on déduit de ce fait le cas général par une méthode que l'on rappelle en preuve :

Théorème 4.5.1.7. *Excepté dans le 1_+ avec n_2 impair, auquel cas $\widetilde{U}(W_1)$ est le groupe métaplectique $\widetilde{Sp}(W_1)$, l'extension $\widetilde{U}(W_1)$ est scindée dans $\widetilde{Sp}(W)$.*

Démonstration. Tout d'abord, dans le cas 1_+, W_1 est toujours scindé, ce qui nous ramène au cas précédent. Ensuite, pour 1_-, c'est W_2 qui est scindé, et il suffit d'utiliser le Corollaire 4.5.1.2. Il reste donc à étudier le cas où, ni W_1, ni W_2, ne sont scindés.

Soit $W_1 \oplus (-W_1)$ qui est scindé. On plonge $U(W_1)$ dans $U(W_1 \oplus (-W_1))$ en étendant l'action trivialement à $-W_1$. On a de plus $W = W_1 \otimes W_2$ et $-W = (-W_1) \otimes W_2$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U(W_1) & \longrightarrow & U(W_1 \oplus (-W_1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sp}(W) \times \mathrm{Sp}(-W) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W \oplus (-W)) \end{array}$$

On a déjà explicité la flèche du haut. L'inclusion de gauche est $g \mapsto (g \otimes 1, 1)$, la flèche du bas est l'inclusion évidente et celle de droite est l'action $g \mapsto g \otimes 1$ où $W \oplus (-W) = (W_1 \oplus (-W_1)) \otimes W_2$. On sait par le corollaire qui précède que l'extension $\widetilde{U}(W_1 \oplus (-W_1))$ est scindé dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W \oplus (-W))$. On déduit de la commutativité du diagramme que l'extension $\widetilde{U}(W_1)$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ est isomorphe à un sous-groupe de l'extension $\widetilde{U}(W_1 \oplus (-W_1))$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W \oplus (-W))$. Comme la seconde est scindée, la première l'est aussi. □

Remarque 4.5.1.8. On peut décrire formellement le 2-cocycle associé dans le cas général, mais il n'est malheureusement pas aussi agréable que le 2-cocyle $c_{X_0 \otimes W_2}$ précédent. Pour ce faire, on peut suivre le développement de [Kud94, §4] pour expliciter le plus possible le 2-cocycle en question dans le cas non-scindé. On s'arrête ici à l'expression dans le cas scindé, et on fait simplement remarquer que ce travail pourrait être reproduit sans trop de difficulté.

4.5.2 Formules explicites

Formules explicites pour les paires de type II. Pour une polarisation complète représentant une paire de type II associée à $W = A \otimes_D B^* + B \otimes_D A^*$ et $t_{D/F}$, on rappelle le plongement :

$$i : (a, b) \in \mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B) \mapsto a \otimes (b^*)^{-1} + b \otimes (a^*)^{-1} \in \mathrm{Sp}(W)$$

Prenons le modèle de Schrödinger associé à $X = A \otimes_D B^*$. Les formules pour ce modèle donne un plongement $p \in P(X) \mapsto (p, r(p)) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_X}(W)$, et donc $\widetilde{P}(X) \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ est scindé et $P(X)$ contient $\mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B)$ via le plongement i. On convient de choisir $p \mapsto (p, t_{\mathrm{Rao}}(p)^{-1})$ comme plongement de $P(X)$ dans $\widetilde{P}(X)$, ce qui correspond à la situation naturelle à laquelle on s'attend sur $\mathrm{GL}(S_X)$:

$$\begin{array}{ccccc} P(X) \times R^\times & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{P}(X) & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_X}(W) \\ (p, \lambda) & \longmapsto & (p, t_{\mathrm{Rao}}(p)^{-1}\lambda) & \longmapsto & (p, \lambda r(p)) \end{array}$$

et en définissant $\widetilde{\mathrm{GL}}(A)$ comme l'image réciproque de $i(\mathrm{GL}(A))$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$, et de même pour B, on obtient pour la paire précédente la représentation :

$$\begin{aligned} &((i(a,1), \lambda), (i(1,b), \lambda')) \in \widetilde{\mathrm{GL}}(A) \times \widetilde{\mathrm{GL}}(B) \\ &\qquad \mapsto \lambda\lambda' t_{Rao}(i(a,1)) t_{Rao}(i(1,b)) r(i(a,1)) \circ r(i(1,b)) \in \mathrm{GL}(S_X) \end{aligned}$$

ou encore pour $\widetilde{c}$ le cocycle métaplectique réduit :

$$((i(a,1),\lambda),(i(1,b),\lambda')) \in \widetilde{\mathrm{GL}}(A) \times \widetilde{\mathrm{GL}}(B) \\ \mapsto \lambda\lambda'\widetilde{c}(i(a,1),i(1,b))t_{Rao}(i(a,b))r(i(a,b)) \in \mathrm{GL}(S_X)$$

On fait une nouvelle mise en garde, à savoir que $\{(i(a,1),1) \in \mathrm{GL}(A)\}$ n'est pas un sous-groupe de $\widetilde{GL}(A)$, mais il faut choisir $a \mapsto (i(a,1), t_{\mathrm{Rao}}(i(a,1))^{-1})$ par exemple car c'est bien $a \mapsto r(i(a,1))$ qui est un morphisme de groupe. En fixant le scindage précédent, on arrive à une représentation :

$$(a,b) \in \mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B) \mapsto r(i(a,b)) \in \mathrm{GL}(S_X)$$

dont il ne reste plus qu'à calculer l'expression explicite où $m = \dim_D(A)$ et $m' = \dim_D(B)$:

$$\begin{aligned} r(i(a,b))f(\sum \beta \otimes \alpha^*) &= |b^{-1} \otimes a^*|^{\frac{1}{2}} f\Big((b^{-1} \otimes a^*)(\sum \beta \otimes \alpha^*)\Big) \\ &= |\det_F(a)|^{\frac{m'}{2}} |\det_F(b)|^{-\frac{m}{2}} f\Big(\sum b^{-1}(\beta) \otimes a^*(\alpha^*)\Big) \end{aligned}$$

via l'identification $S_X \simeq \mathcal{S}(Y)$ avec $Y = B \otimes A^*$.

En choisissant une base (e_i) de A et (f_j) de B^*, auxquelles correspondent des bases duales (e_i^*) et (f_j^*) vis-à-vis de $[,]$ du crochet de dualité, on exprime cette action en terme matriciel. De plus, on identifie naturellement $Y = B \otimes A^*$ et $\mathrm{M}_{m',m}(D)$. Pour $(M,N) \in \mathrm{GL}_m(D) \times \mathrm{GL}_{m'}(D)$, $f \in \mathcal{S}(Y)$ et $x \in \mathrm{M}_{m',m}(D)$, on définit la représentation :

$$\omega_{A,B}(M,N)f(x) = |\det_F(M)|^{\frac{m'}{2}} |\det_F(N)|^{-\frac{m}{2}} f(N^{-1}xM)$$

Formules explicites pour les paires de type I. Soit $W = W_1 \otimes W_2$ une paire duale de type I associée à $t_{D/F}$, on rappelle le plongement :

$$i : (u_1,u_2) \in U(W_1) \times U(W_2) \mapsto u_1 \otimes u_2 \in \mathrm{Sp}(W)$$

Prenons le modèle de Schrödinger associé à un sous-espace isotrope maximal X de W. On note $\widetilde{U(W_1)}$ et $\widetilde{U(W_2)}$ les images réciproques de $i(U(W_1))$ et $i(U(W_2))$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. L'isomorphisme d'extension centrale $(g,\lambda) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(W) \mapsto (g, \lambda t_{Rao}(g)r(g)) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S_X}(W)$ nous donne une représentation :

$$((u_1 \otimes 1,\lambda),(1 \otimes u_2,\lambda')) \in \widetilde{U(W_1)} \times \widetilde{U(W_2)} \\ \mapsto \lambda\lambda' t_{Rao}(u_1 \otimes 1) t_{Rao}(1 \otimes u_2) r(u_1 \otimes 1) \circ r(1 \otimes u_2) \in \mathrm{GL}(S_X)$$

ou encore pour $\widetilde{c}$ le cocycle métaplectique réduit :

$$((u_1 \otimes 1,\lambda),(1 \otimes u_2,\lambda')) \in \widetilde{U(W_1)} \times \widetilde{U(W_2)} \\ \mapsto \lambda\lambda'\widetilde{c}(u_1 \otimes 1, 1 \otimes u_2) t_{Rao}(u_1 \otimes u_2) r(u_1 \otimes u_2) \in \mathrm{GL}(S_X)$$

- Si $\widetilde{U(W_1)}$ est scindé, on choisit un scindage :

$$(u_1,\lambda) \in U(W_1) \times R^\times \mapsto (u_1 \otimes 1, \beta_{W_2}(u_1) t_{Rao}(u_1 \otimes 1)^{-1}\lambda) \in \widetilde{U(W_1)}$$

Ainsi on obtient une représentation :

$$((u_1,\lambda),(1\otimes u_2,\lambda')) \in (U(W_1)\times R^\times)\times \widetilde{U(W_2)}$$
$$\mapsto \lambda\lambda'\beta_{W_2}(u_1)t_{Rao}(1\otimes u_2)r(u_1\otimes 1)\circ r(1\otimes u_2) \in \mathrm{GL}(S_X)$$

On peut recommencer avec $\widetilde{U(W_2)}$ si ce dernier est scindé. Sinon, on ne peut pas faire mieux.

- Si W_1 est scindé, alors on peut prendre $X = X_1 \otimes W_2$ avec $X_1 \in \Omega(W_1)$. Ainsi, il y a une inclusion naturelle de $U(W_2)$ dans $P(X)$ via $u_2 \mapsto 1\otimes u_2$. On a alors :

$$(u_2,\lambda)\in U(W_2)\times R^\times \mapsto (u_2, t_{Rao}(u_2)^{-1}\lambda)\in \widetilde{U(W_2)}$$

et ainsi la représentation devient :

$$((u_1\otimes 1,\lambda),(u_2,\lambda'))\in \widetilde{U(W_1)}\times(U(W_2)\times R^\times)\mapsto \lambda\lambda' t_{Rao}(u_1\otimes 1)r(u_1\otimes 1)\circ r(1\otimes u_2)\in \mathrm{GL}(S_X)$$

et si $\widetilde{U(W_1)}$ est lui-même scindé, on prend alors :

$$(u_1,u_2)\in U(W_1)\times U(W_2)\mapsto \beta_{W_2}(u_1)r(u_1\otimes 1)\circ r(1\otimes u_2) = \beta_{W_2}(u_1)r(u_1\otimes u_2)\in \mathrm{GL}(S_X)$$

Remarque 4.5.2.1. Remarquons que tout autre scindage de $\widetilde{U}(W_1)$ est associé à un caractère lisse χ de $U(W_1)$, et que cela change de manière mineure la correspondance au sens où, le nouveau $\Theta(\pi)$ défini en prenant le plus grand quotient π-isotypique pour $\pi\in \mathrm{Irr}_{U(W_1)}$ est alors « $\Theta(\pi\otimes\chi^{-1})$ » pour l'ancien scindage. Cela ne change moralement pas les résultats que l'on attend de la correspondance, même si cela change celle-ci dans les faits. Il faudra donc faire attention aux conventions liées aux scindages.

4.5.3 Définitions de $\Theta(\pi)$ et $\theta(\pi)$

On suppose dorénavant que R est algébriquement clos. Soit (H_1,H_2) une paire duale de $\mathrm{Sp}(W)$. Soient $\widetilde{H_1}$ et $\widetilde{H_2}$ les relevés de ces paires au groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ et (ω_ψ, S) la représentation de Weil associée à $\widetilde{H}\times\widetilde{H'}$. Par définition, c'est la composée – ou restriction – de la représentation de Weil définie pour le groupe métaplectique :

$$\widetilde{H_1}\times\widetilde{H_2}\longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)\xrightarrow{\omega_\psi}\mathrm{GL}(S).$$

Soit π une représentation irréductible de $\widetilde{H_1}$ telle que sa restriction à $R^\times$ soit $\pi((1,\lambda)) = \lambda\mathrm{Id}_S$. On note S_π le plus grand quotient π-isotypique de S. Le lemme 1.1.6.4 assure qu'il existe une représentation $\Theta(\pi)$ de $\widetilde{H_2}$, unique à isomorphisme près, telle que $S_\pi\simeq \pi\otimes\Theta(\pi)$. Sa restriction au centre de $\widetilde{H_2}$ vérifie $\Theta(\pi)(1,\lambda) = \lambda\mathrm{Id}_{\Theta(\pi)}$. On note enfin $\theta(\pi)$ le plus grand quotient semi-simple de $\Theta(\pi)$. On formule la conjecture suivante :

Conjecture. Si F est un corps local non-archimédien, et si la caractéristique l de R est banale vis-à-vis de H_1 et H_2, alors :

1. $\theta(\pi)$ est irréductible quand $\Theta(\pi)\neq 0$;
2. si $\theta(\pi)\simeq\theta(\pi')\neq 0$, alors $\pi\simeq\pi'$.

Remarque 4.5.3.1. On sait grâce à [Mín06, 4.5.2] qu'il existe un contre-exemple dans le cas l non banal pour les paires duales de type II (cf. Section 2.3). Ce contre-exemple est le suivant : si $D = F$ un corps local non-archimédien, prenons la paire duale de type II $(\mathrm{GL}(1),\mathrm{GL}(m))$ où $m\geq 2$. On suppose de plus que $q^m\equiv 1 \mod l$ et $q\neq 1 \mod l$. Alors, les représentations $1_l\otimes 1_m$ et $1_l\otimes(|\det|_F^{-1}1_m)$ sont des quotients de la représentation ω_ψ.

Remarque 4.5.3.2. On donnera dans la Section 7.2 un contre-exemple dans le cas non banal pour une paire de type I symplectique-orthogonale.

4.5.4 Identité seesaw, paires duales balançoires

On suppose encore que R est algébriquement clos. On rappelle la définition des paires duales balançoires ou « seesaw pairs » en anglais. C'est un couple de paires duales (H_1, H_2) et (K_1, K_2) de $\mathrm{Sp}(W)$ telles que $H_1 \subset K_1$ et $K_2 \subset H_2$. On écrit :

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & H_2 \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ H_1 & K_2 \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales représentent les inclusions et les flèches obliques les relations de paires duales. Elles se relèvent de manière évidente en des paires duales du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}$ en conservant les inclusions prescrites. L'identité seesaw ou « balançoire » est la suivante.

Proposition 4.5.4.1. *Pour π_1 une représentation irréductible de $\widetilde{H_1}$ et π_2 une représentation irréductible de $\widetilde{K_2}$, dont les restrictions à $R^\times$ sont comme dans le paragraphe précédent, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{H_1}}(\Theta(\pi_2), \pi_1) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{K_2}}(\Theta(\pi_1), \pi_2).$$

Démonstration. Soit ω_ψ la représentation de Weil. On a par définition du plus grand quotient π_2-isotypique :

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{H_1} \times \widetilde{K_2}}(\omega_\psi, \pi_1 \otimes \pi_2) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{H_1} \times \widetilde{K_2}}(\Theta(\pi_2) \otimes \pi_2, \pi_1 \otimes \pi_2).$$

En effet, les inclusions $H_1 \subset K_1$ et $K_2 \subset H_2$ assurent que les éléments de H_1 et K_2 commutent entre eux. Enfin, comme R est algébriquement clos, le lemme de Schur permet alors d'identifier le membre de gauche avec $\mathrm{Hom}_{\widetilde{H_1}}(\Theta(\pi_2), \pi_1)$ puisque $\mathrm{Hom}_{\widetilde{K_2}}(\pi_2, \pi_2) = R$. De même, en considérant cette fois le plus grand quotient π_1-isotypique, on obtient l'égalité désirée. $\square$

Chapitre 5

Paires duales de type I

Les paires duales d'un groupe symplectique sont définies dans la section 2.3. On concentre ici nos efforts sur les paires duales de type I (cf. tableau de la Section 2.3), celles de type II ayant été pleinement traitées dans [Mín06]. On reprend les hypothèses qui ont permis de définir la représentation de Weil dans la Section 4.1, à savoir :

— F est un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2, et de caractéristique résiduelle p ;

— D est un corps qui est, soit F lui-même, soit une extension quadratique F, soit un corps de quaternion sur F ;

— W est un espace symplectique de dimension finie (et paire) n sur F ;

— R est un corps (de caractéristique différente de p) tel que :

$$\mu^p(R) = \begin{cases} \{\xi \in R^\times \mid \xi^p = 1\} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{si la car. de } F \text{ est positive}; \\ \{\xi \in R^\times \mid \exists k \in \mathbb{N}, \xi^{p^k} = 1\} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

— pour $\psi \in \hat{F}_R$ un caractère non trivial de F à valeurs dans R, la représentation de Weil ω_ψ (cf. Définition 4.1.0.8) est une représentation du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ qui se retreint aux relevés de paires duales de $\mathrm{Sp}(W)$ (cf. Section 4.5) ;

— on suppose que R n'est pas de caractéristique 2 et contient une racine carrée de p que l'on fixe dorénavant ;

— à partir de la Section 5.2, R sera supposé algébriquement clos.

5.1 Tours de Witt et filtrations

Le vocabulaire sur les espaces ε-hermitiens (indice de Witt, espace scindé, etc.) est repris de la Section 2.1. La restriction de la représentation de Weil, les relevés des paires duales, et leurs scindages, sont discutés dans la Section 4.5. Dans toute la suite, les conventions sont les suivantes : W_1^0 désignera un espace ε_1-hermitien anisotrope sur D (cf. Section 2.1). On note $W_1^{m_1} = W_1^0 + m_1\mathbb{H}$ la série de Witt associée et $n_1 = \dim_D(W_1^{m_1})$. De même, l'espace W_2^0 sera ε_2-hermitien anisotrope avec $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ et $W_2^{m_2}$ la série de Witt associée. Les applications t_{Rao} sont définis dans la Section 4.4.

5.1.1 Représentation de Weil pour les tours de Witt

Conventions. Pour alléger les notations, on pose $W_1 = W_1^{m_1}$ et $W_2 = W_2^{m_2}$. Le couple $(U(W_1), U(W_2))$ est une paire duale réductive de type I dans $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2)$. On rappelle la forme de l'inclusion canonique (cf. Section 2.3) :

$$\begin{array}{rcccc} i & : & U(W_1) \times U(W_2) & \rightarrow & \mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2) \\ & & (u_1, u_2) & \mapsto & u_1 \otimes u_2 \end{array}.$$

On note alors $\widetilde{U(W_1)}_{W_2}$ l'image réciproque de $i(U(W_1) \times 1)$ dans $\mathrm{Sp}(\widetilde{W_1 \otimes} W_2)$. Et quand W_2 parcourt une série de Witt, tous ces groupes $\widetilde{U(W_1)}_{W_2}$ sont isomorphes en tant qu'extensions centrales de $U(W_1)$, mais pas canoniquement *a priori*. Il faut donc fixer de tels isomorphismes, ce qui revient à choisir des caractères de $U(W_1)$. On confondra dorénavant $U(W_1)$ et son image $i(U(W_1) \times 1)$ dans $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2)$.

Définition 5.1.1.1. Soit $m_1 \in \mathbb{N}$. On pose :

$$H_1^{m_1} = \begin{cases} \widetilde{U(W_1)}_{W_2^0} & \text{si } W_2^0 \neq 0; \\ \\ U(W_1) \times R^\times & \text{sinon.} \end{cases}$$

On explique maintenant comme fixer des isomorphismes entre H_1 et $\widetilde{U(W_1)}_{W_2}$. On écrit donc $W_2 = W_2^0 + m_2\mathbb{H}$. Soit S^0 un modèle de la représentation de Weil associée à $W_1 \otimes W_2^0$. Soit X_2 un lagrangien de $m_2\mathbb{H}$ et $S = S_{W_1 \otimes X_2}$ le modèle de Schrödinger associé à $W_1 \otimes m_2\mathbb{H}$. On rappelle que, d'après la Proposition 4.3.0.7, l'inclusion :

$$\mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2^0) \times \mathrm{Sp}(W_1 \otimes m_2\mathbb{H}) \rightarrow \mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2)$$

se relève de manière canonique en un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S^0}(W_1 \otimes W_2^0) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S}(W_1 \otimes m_2\mathbb{H}) & \rightarrow & \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S^0 \otimes S}(W_1 \otimes W_2) \\ ((g^0, M^0), (g, M)) & \mapsto & (g^0 \oplus g, M^0 \otimes M) \end{array}.$$

À celui-ci correspond un morphisme :

$$j : \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1 \otimes W_2^0) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1 \otimes m_2\mathbb{H}) \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1 \otimes W_2).$$

L'image réciproque de $\widetilde{U(W_1)}_{W_2}$ par j est $\widetilde{U(W_1)}_{W_2^0} \times \widetilde{U(W_1)}_{m_2\mathbb{H}}$. La seule ambigüité repose alors sur un choix de scindage de $U(W_1)$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1 \otimes m_2\mathbb{H})$. Or, le modèle de Schrödinger S est muni d'une action « naturelle » de $U(W_1)$. En effet, en choisissant une polarisation complète $m_2\mathbb{H} = X_2 + X_2^*$, le groupe $U(W_1)$ agit sur $C_c^\infty(W_1 \otimes X_2^*)$ par l'action géométrique classique sur W_1 *i.e.* l'action héritée de $u.w_1 = u(w_1)$. On la note σ. On obtient donc que le morphisme de groupes :

$$(u, M) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S^0}(W_1 \otimes W_2^0) \mapsto (u, M \otimes \sigma[u]) \in \widetilde{\mathrm{Sp}}_{\psi,S^0 \otimes S}(W_1 \otimes W_2).$$

induit un isomorphisme de groupes $H_1^{m_1} \simeq \widetilde{U}(W)_{W_2}$ grâce à j. On note cet isomorphisme d'extension centrale j_{m_2}. Il ne dépend pas du choix de X_2.

Représentation de Weil pour les tours de Witt. Pour tout $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, on fixe des isomorphismes de groupes à l'aide de la méthode que l'on vient de décrire :

$$j^1_{m_1,m_2} : H_1^{m_1} \to \widetilde{U(W_2^{m_2})}_{W_1^{m_1}}.$$

De même, pour l'autre côté :

$$j^2_{m_2,m_1} : H_2^{m_2} \to \widetilde{U(W_1^{m_1})}_{W_2^{m_2}}.$$

Définition 5.1.1.2. Soit (ω_ψ, S) un modèle de la représentation de Weil associé à $W_1^{m_1} \otimes W_2^{m_2}$. Soit $i_{m_1,m_2} : (u_1, u_2) \in H_1^{m_1} \times H_2^{m_1} \to j^1_{m_1,m_2}(u_1) j^2_{m_2,m_1}(u_2) \in \mathrm{Sp}(W_1^{m_2} \otimes W_2^{m_2})$. On pose :

$$\omega_{m_1,m_2} = \omega_\psi \circ i_{m_1,m_2}.$$

De plus, on a des inclusions canoniques $H_1^{m_1} \subset H_1^{m_1'}$ pour tout $m_1 \leq m_1'$. En effet, on écrit $W_1^{m_1'} = W_1^{m_1} + k\mathbb{H}$ où $k = m_1' - m_1$. Soit X_1 un lagrangien de $k\mathbb{H}$. On considère le modèle de Schrödinger mixte associé à $W_1^{m_1'} \otimes W_2^0$ et $X_1 \otimes W_2^0$. On peut procéder comme précédemment en relevant l'inclusion canonique :

$$\mathrm{Sp}(W_1^{m_1} \otimes W_2^0) \times \mathrm{Sp}((m_1' - m_1)\mathbb{H} \otimes W_2^0) \to \mathrm{Sp}(W_1^{m_1'} \otimes W_2^0)$$

en un morphisme j, et considérer l'image $j(H_1^{m_1}, 1)$ de $H_1^{m_1} \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1^{m_1} \otimes W_2^0)$ par ce relevé, qui est un sous-groupe de $H_1^{m_1'}$. Par abus de notation, on écrira donc que $H_1^{m_1} \subset H_1^{m_1'}$. Elle ne dépend pas du choix de X_1.

Bases adaptées et paraboliques standards. On fixe maintenant des bases adaptées aux séries de Witt. On suppose donc que pour tout $m_1 \in \mathbb{N}$, on a une famille de vecteurs $(e_1^i)_{1 \leq i \leq m_1}$ et $(f_1^i)_{1 \leq i \leq m_1}$ de $W_1^{m_1}$ de sorte que $W_1^{m_1} = {}_kX_1^{m_1} + W_1^{m_1-k} + {}_k(X_1^{m_1})^*$ où ${}_kX_1^{m_1}$ est engendré par $(e_1^i)_{m_1-k+1 \leq i \leq m_1}$ et $({}_kX_1^{m_1})^*$ par $(f_1^i)_{m_1-k+1 \leq i \leq m_1}$, les autres vecteurs étant dans $W_1^{m_1-k}$. On suppose de même pour la série construite à partir de W_2^0. On obtient ainsi des paraboliques standards maximaux de $U(W_1^{m_1})$, on reprend les notations de la Section 2.1 en écrivant $P({}_kX_1^{m_1}) = M({}_kX_1^{m_1}) \ltimes N({}_kX_1^{m_1})$ où le Levi $M({}_kX_1^{m_1}) \simeq \mathrm{GL}({}_kX_1^{m_1}) \times U(W_1^{m_1-k})$. On note $P_k^{m_1}$, $M_k^{m_1}$ et $G_k^{m_1}$ les images réciproques de $P({}_kX_1^{m_1})$, $M({}_kX_1^{m_1})$ et $\mathrm{GL}({}_kX_1^{m_1})$ dans $H_1^{m_1}$. On a un morphisme de groupe surjectif donné par la multiplication dans $H_1^{m_1}$:

$$G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \twoheadrightarrow M_k^{m_1}.$$

De plus, on $P_k^{m_1} \simeq M_k^{m_1} \ltimes N({}_kX_1^{m_1})$ où $N({}_kX_1^{m_1})$ est vu comme un sous-groupe de $H_1^{m_1}$ grâce au scindage canonique du Corollaire 4.3.0.5. De même, on adopte des notations similaires pour $W_2^{m_2}$ et la base adaptée associée. Toutes les représentations que l'on considère ont une action de $R^\times$ prescrites comme dans la Section 4.5.3, à savoir $\pi(1, \lambda) = \lambda$ Id. On note alors :

$$\mathrm{Rep}_R(G_k^{m_1}) = \{\pi \mid \forall \lambda \in R^\times, \pi(1, \lambda) = \lambda \mathrm{Id}\}.$$

De même, $\mathrm{Irr}_R(G_k^{m_1})$ désignera les classes d'équivalence de représentations irréductibles dans $\mathrm{Rep}_R(G_k^{m_1})$. Pour $k' < k$, on a un parabolique standard maximal de $G_k^{m_1}$ déterminé par la base adaptée :

$$(G_{k'}^{m_1} \times G_{k-k'}^{m_1-k'}) \ltimes N_{k'}$$

où $N_{k'} = N({}_{k'}X_1^{m_1}) \cap G_k^{m_1}$ en tant que sous-groupes de $H_1^{m_1}$. La loi sur $G_k^{m_1}$ est donnée par un 2-cocycle dont la classe de cohomologie est triviale. Il existe donc une résolution de ce 2-cocycle par une section $t : \mathrm{GL}({}_kX_1^{m_1}) \to R^\times$ qui définit un caractère dans $\mathrm{Rep}_R(G_k^{m_1})$ en posant :

$$\chi_t : (g, \lambda) \in G_k^{m_1} \mapsto \lambda t(g) \in R^\times.$$

Si le 2-cocyle qui définit $G_k^{m_1}$ est $c(g_1, g_2) = (\det(g_1), \det(g_2))$, alors on peut prendre comme dans [Kud86, §1] la section $t : g \mapsto \omega(\frac{1}{2}\det g)^{-1}$ où $\omega(\alpha)$ est défini juste avant le Théorème 4.4.0.16. Un tel caractère χ_t détermine un isomorphisme entre $\mathrm{Rep}_R(\mathrm{GL}({}_kX_1^{m_1}))$ et $\mathrm{Rep}_R(G_k^{m_1})$ qui envoie σ sur $\sigma_{\chi_t} : (g, \lambda) \mapsto \sigma(g)\chi_t(g, \lambda)$. On emploie des notations similaires pour $H_1^{m_1-k}$. On définit de plus $\mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1^{m_1})$ comme les représentations irréductibles dont tous les foncteurs de Jacquet vis-à-vis des paraboliques standards sont nuls, ainsi que $\mathrm{Irr}_R^{\mathrm{scusp}}(H_1^{m_1})$ pour l'ensemble des représentations supercuspidales. Dans ce cas, on emploiera les notations de Tadic $\rtimes$ (cf. Section 2.6). Pour des représentations $\rho \in \mathrm{Rep}_R(\mathrm{GL}({}_kX_1^{m_1})$ et $\sigma \in \mathrm{Rep}_R(H_1^{m_1-k})$, on écrira parfois $\rho \rtimes \sigma = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}({}_kX_1^{m_1}) \times H_1^{m_1-k}}^{H_1^{m_1}}(\rho \otimes \sigma)$ pour signifier l'induite $\rho_{\chi_t} \rtimes \sigma = \mathrm{Ind}_{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k}}^{H_1^{m_1}}(\rho_{\chi_t} \otimes \sigma)$.

5.1.2 Première filtration (Rallis), série principale dégénérée

On suppose que $W_2^0 = 0$ *i.e.* $W_2^{m_2}$ est scindé pour tout $m_1 \in \mathbb{N}$. Soient m_1 et m_2 des entiers naturels. Pour alléger les notations, on pose $W_1 = W_1^{m_1}$ et $W_2 = W_2^{m_2}$. On réalise la représentation de Weil $\omega_\psi \in \mathrm{Rep}_R(\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1 \otimes W_2))$ comme le modèle de Schrödinger associé au lagrangien $W_1 \otimes X_2$, où X_2 est un lagrangien de W_2 dont on fixe le dual X_2^* dans W_2. On identifie $S_{W_1 \otimes X_2} \simeq \mathcal{S}(W_1 \otimes X_2^*)$ via la décomposition $W_1 \otimes W_2 = W_1 \otimes X_2 + W_1 \otimes X_2^*$. De plus, l'isomorphisme d'espaces vectoriels $w_1 \otimes x_2^* \in W_1 \otimes X_2^* \mapsto \big(x_2 \mapsto w_1 < x_2^*, x_2 > \big) \in \mathrm{Hom}_D(X_2, W_1)$ induit un isomorphisme de représentations $S_{W_1 \otimes X_2} \simeq \mathcal{S}(\mathrm{Hom}(X_2, W_1))$. Soit ω_{m_1,m_2} la représentation de Weil associée à W_1 et W_2 dans le paragraphe précédent. Par définition, on a $H_1 = U(W_1) \times R^\times$ puisque W_2 est scindé. Donc cela fait sens de prendre les coinvariants $(\omega_{m_1,m_2})_{U(W_1)}$ de ω_{m_1,m_2} vis-à-vis du sous-groupe $U(W_1)$ de H_1. D'après le paragraphe précédent, l'action de $U(W_1)$ est « géométrique » au sens où, si $f \in S_{W_1 \otimes X_2}$, l'action d'un élément $u_1 \in U(W_1)$ est donnée par :

$$\omega_{m_1,m_2}((u_1, 1), (1, 1))f : x \in \mathrm{Hom}(X_2, W_1) \mapsto f(u_1^* x) = f(u_1^{-1}x) \in R.$$

Enfin, on note $P(X_2)$ le parabolique de $U(W_2)$ qui stabilise X_2 et P_{m_2} l'image réciproque dans H_2 de $\{1 \otimes p \in P(W_1^0 \otimes X_2) \mid p \in P(X_2)\} \simeq P(X_2)$.

Théorème 5.1.2.1. *L'espace des $U(W_1)$-coinvariants $(\omega_{m_1,m_2})_{U(W_1)}$ est isomorphe, en tant que représentation de H_2, à l'espace de fonctions sur H_2 engendré par les ϕ_f : $h \to (\omega_{m_1,m_2}((1, 1), h).f)(0)$, pour $f \in S_{W_1 \otimes X_2}$, et muni de l'action naturelle de H_2 par translation à droite.*

De plus, pour tout $(1 \otimes p, \lambda) \in P_{m_2}$, les fonctions ϕ_f vérifient l'équation :

$$\phi_f((1 \otimes p, \lambda)h) = \nu_{X_2,n_1}((1 \otimes p, \lambda))\phi_f(h)$$

où ν_{X_2,n_1} est un caractère de P_{m_2} défini par :

$$\nu_{X_2,n_1}((1 \otimes p, \lambda)) = \lambda\ t_{Rao}(1 \otimes p)\ |\det_{W_1 \otimes X_2}(1 \otimes p)|^{\frac{1}{2}} = \lambda\ t_{Rao}(1 \otimes p)\ |\det_{X_2}(p)|^{\frac{n_1}{2}}.$$

Démonstration. Nous commençons par la première assertion, dont la deuxième est une conséquence facile au vu des modèles explicites pour les paires duales de type I (cf. Section 4.2.1 & 4.5.2). Par définition, on a :

$$(\omega_{m_1,m_2})_{U(W_1)} = \omega_{m_1,m_2}/\omega_{m_1,m_2}(U(W_1))$$

où $\omega_{m_1,m_2}(U(W_1)) =< (\omega_{m_1,m_2}h).f - f \mid h \in U(W_1), f \in \omega_{m_1,m_2} >$. On considère ensuite le morphisme $\phi : f \mapsto \phi_f$ dans $\mathrm{Rep}_R(H_2)$, où l'action sur l'espace de droite est décrite dans l'énoncé du théorème. Nous sommes donc ramenés à prouver que $\phi_f = 0$ si et seulement si $f \in \omega_{m_1,m_2}(U(W_1))$. Le sens indirect est clair puisque les actions de $U(W_1)$ et H_2 commutent. Pour prouver le sens direct, nous allons utiliser la Proposition 1.1.2.6 et le Corollaire 1.1.2.7 qui relient coinvariants et nullité des intégrales orbitales.

Soit donc f dans le noyau de ϕ *i.e.* pour tout $h \in H_2$, $\phi_f(h) = (\omega_{m_1,m_2}h).f(0) = 0$. Rappelons que la représentation ω_{m_1,m_2} s'identifie à $\mathcal{S}(\mathrm{Hom}(X_2^*, W_1))$. On a une action constructible de $U(W_1)$ sur $Z = \mathrm{Hom}(X_2^*, W_1)$ via celle de $U(W_1)$ sur W_1. On pose $r = \min(m_2, n_1)$. Si l'on note Z_i l'ensemble des éléments de rang i dans Z, alors Z est filtré par le rang et Z_r est ouvert dans $\cup_{0 \leq i \leq r} Z_i$, où chaque Z_i est une réunion de $U(W_1)$-orbites donc stable par l'action de $U(W_1)$. On procède par récurrence finie pour montrer que si les intégrales orbitales de f sur $\cup_{0 \leq i \leq k-1} Z_i$ sont nulles, alors les intégrales orbitales de f sur Z_k sont nulles. Ce qui impliquera le résultat d'après la Proposition 1.1.2.6. Tout d'abord, il faut justifier que les intégrales de f sur chaque orbite de Z_k convergent. Ce fait provient du Corollaire 1.1.2.7. En effet, Z_k est ici l'ouvert régulier de l'action de $U(W_1)$ sur $\cup_{0 \leq i \leq k} Z_i$ et l'hypothèse de récurrence entraîne la nullité d'intégrales orbitales sur chaque orbite de $\cup_{0 \leq i \leq k-1} Z_i$. L'initialisation en $r = 0$ revient simplement à dire que $f(0) = 0$, ce qui est vrai puisque $\phi_f(1) = f(0) = 0$.

Il reste donc à montrer qu'il existe des intégrales orbitales nulles sur toute orbite dans Z_k. Rappelons que d'après la Proposition 4.4.0.15, on a pour tout $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(Z + Z^*)$:

$$\omega_\psi(g, \lambda).f((0,0)) = \lambda \ t_{\mathrm{Rao}}(g)^{-1} \int_{Z/\mathrm{Ker}(c^*)} \psi(\frac{< c^*x, d^*x >}{2}) f((c^*x, 0)) |(c^*)'|^{\frac{1}{2}} d\dot{x}$$

Par hypothèse, $(\omega_{m_1,m_2}h).f((0,0)) = 0$ pour tout $h \in H_2$. En choisissant judicieusement des éléments $h \in U(W_2)$, on va montrer le résultat. Soit (e_i) une base de X_2 et (e_i^*) une base duale dans X_2^*. On note ${}_iX_2$ le sous-espace vectoriel de X_2 engendré par les i premiers vecteurs. De même avec ${}_iX_2^*$. Soit ${}_iW_2$ tel que $W_2 = ({}_iX_2 + {}_iX_2^*) + {}_iW_2$. Alors, on définit $h_r(d) \in U(W_2)$ où $d \in \mathrm{End}_D({}_kX_2^*)$ avec d qui est $(-\varepsilon_2)$-hermitienne, et vis-à-vis de la décomposition $W_2 = {}_kX_2 + {}_kW_2 + {}_kX_2^*$, la matrice de $h_k(d)$ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_2 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

En particulier, on a en écrivant $W_1 \otimes W_2 = W_1 \otimes {}_kX_2 + W_1 \otimes {}_kW_2 + W_1 \otimes {}_kX_2^*$:

$$1 \otimes h_k(d) = \begin{bmatrix} & & & \varepsilon_1 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & d \otimes 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(Z + Z^*)$$

et donc c^* réalise un isomorphisme $(c^*)' : Z/\mathrm{Ker}(c^*) \simeq \mathrm{Hom}({}_kX_2, W_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)$ qui consiste simplement à envoyer la base canonique de ${}_iX_2$ sur sa base duale dans ${}_iX_2^*$. On obtient alors :

$$\int_{\mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)} \psi([z, zd])f(z)dz = 0$$

où $zd = z \circ d$ et $[z, z'] =< z, (c^*)'^{-1}z' >$ est donnée par la dualité définie par $(c^*)'$.

On va utiliser la Proposition 1.1.2.12 pour réécrire cette dernière intégrale et conclure. On décompose $\mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)$ en $U(W_1)$-orbites. Deux éléments de rang k sont dans la même $U(W_1)$-orbite si et seulement s'ils ont la même matrice de Gram d'après [MVW87, Chap. 1, I, 9]. En choisissant une base de $(x_1, \ldots, x_k)$ de ${}_kX_2^*$, on remarque que la restriction aux éléments de rang k de l'application :

$$z \in \mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1) \mapsto \mathrm{Gr}(z) = (< z(x_i), z(x_j) >_2)_{1 \leq i,j \leq k} \in M_k^{\varepsilon_2}(D)$$

est une submersion au sens des variétés analytiques (cf. Section 1.1.2). En effet, les espaces vectoriels $\mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)$ et $M_k^{\varepsilon_2}(D)$ (l'ensemble des matrices carrées ε_2-hermitienne de taille k) sont de dimension finie sur F, il possède donc des structures naturelles de variétés analytiques. Ensuite, l'ensemble des éléments de rang k dans $\mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)$ forme un ouvert de $\mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)$, qui est donc muni d'une structure de sous-variété. En choisissant une base de W_1 et en notant $M \in M_{n_1}^{\varepsilon_1}(D)$ la matrice qui définit le produit hermitien sur W_1, on obtient en notation matricielle :

$$\mathrm{Gr} : z \mapsto \mathrm{Gr}(z) = {}^{t\tau}zMz.$$

Cette application est analytique car ses coefficients peuvent être vus comme des polynômes à coefficients dans F. Sa différentielle est $d\mathrm{Gr}_z : h \mapsto {}^{t\tau}zMh + {}^{t\tau}hMz = {}^{t\tau}zMh + \varepsilon_2 {}^{t\tau}({}^{t\tau}zMh)$. Elle est surjective à condition que z soit de rang k. De plus, $z \mapsto \psi([z, zd])$ est constante sur les $U(W_1)$-orbites. Sur les tenseurs élémentaires, on a :

$$[w_1 \otimes x_i, w_1' \otimes x_j] =< w_1 \otimes x_i, w_1' \otimes x_j^* >= \mathrm{tr}_{D/F}\tau((< x_i, x_j^* >_1) < w_1, w_1' >_1).$$

On obtient donc $[z, zd] = \mathrm{tr}_{D/F} \circ \mathrm{tr}_{M_k(D)}(\mathrm{Gr}(z)d) = \mathrm{t}(\mathrm{Gr}(z)d)$ en posant $t = \mathrm{tr}_{D/F} \circ \mathrm{tr}_{M_k(D)}$.

On pose donc $X = Z_k \cap \mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)$, l'ensemble des éléments de rang k, et $Y = M_k^{\varepsilon_1}(D)$. On vient de montrer que $\mathrm{Gr} : X \to Y$ définit une submersion de variétés analytiques. On va appliquer la Proposition 1.1.2.12. Soit μ_Y la mesure de Haar de $M_k^{\varepsilon_1}(D)$. On prend pour μ_X la restriction de la mesure de Haar sur $\mathrm{Hom}({}_kX_2^*, W_1)$ à X. Alors il existe un morphisme surjectif de R-espace vectoriel $M : f \in C_c^\infty(X) \mapsto M_f \in C_c^\infty(Y)$ tel que $\mu_X = \mu_Y \circ M$. On obtient pour tout $d \in M_k^{-\varepsilon_2}(D) = M_k^{\varepsilon_1}(D)$:

$$\int_X \psi([z, zd])f(z)d\mu_X(z) = \int_Y \psi(t(yd))M_f(y)d\mu_Y(y) = 0.$$

On reconnaît dans cette dernière égalité la transformée de Fourier de M_f sur Y. Comme celle-ci est inversible d'après la Proposition A.1.2.1, on en déduit que M_f est la fonction nulle sur Y.

Il reste à montrer que M_f se factorise par toute intégrale orbitale en un sens que l'on va préciser. Soit $U(W_1).z$ une orbite dans X, on note $\mu_{U(W_1).z}$ la mesure $U(W_1)$-invariante sur $U(W_1).z$. Comme l'action de $U(W_1)$ sur X est régulière, l'orbite $U(W_1).z$ est fermée dans X. Il est possible qu'il n'existe pas de mesure qui soit $U(W_1)$-invariante sur $U(W_1).z$, mais si elle existe, elle est unique à scalaire près. Soit $U(W_1).z = y \in Y$, on définit la distribution $T_y : h \in C_c^\infty(X) \mapsto M_h(y) \in R$. Cette distribution est $U(W_1)$-invariante puisque l'application $h \in C_c^\infty(X) \mapsto M_h \in C_c^\infty(Y)$ l'est. En effet, cela provient du fait que la mesure μ_X est $U(W_1)$-invariante. Soit $h \in C_c^\infty(X)$ et $u \in U(W_1)$. Par définition de M, on a pour tout $F \in C_c^\infty(Y)$, l'égalité :

$$\mu_Y(F \times M_{u.h}) = \mu_X((F \circ \mathrm{Gr}) \times (u.h)) = \mu_X(u.((F \circ \mathrm{Gr}) \times h)) = \mu_Y(F \times M_h).$$

La mesure μ_Y étant partout non-nulle, on en déduit que $M_{u.h} = M_h$. Ensuite, pour tout $U(W_1).z = y$, on a $C_c^\infty(X \backslash (U(W_1).z)) \subset \ker(T_y)$. Il existe donc une unique distribution T' : $C_c^\infty(U(W_1).z) \to R$ telle que $T_y = T' \circ \mathrm{res}_{U(W_1).z}$ où $\mathrm{res}_{U(W_1).z} : C_c^\infty(X) \to C_c^\infty(U(W_1).z) = C_c^\infty(X)/C_c^\infty(X \backslash (U(W_1).z))$ est la restriction au fermé $U(W_1).z$. De plus, T' est $U(W_1)$-invariante car M l'est. On obtient donc que T' est un multiple de $\mu_{U(W_1).z}$. Si $\mu_{U(W_1).z} \neq 0$, alors T' est non nulle car M est surjective. Ainsi, $M_f(y) = 0$ pour tout $y \in Y$ entraîne que $\mu_{U(W_1).z}(\mathrm{res}_{U(W_1).z}(f)) = 0$ *i.e.* toutes les intégrales orbitales de f sont nulles. Cela entraîne le résultat. □

On en déduit le corollaire :

Corollaire 5.1.2.2. *L'espace $(\omega_{m_1,m_2})_{U(W_1)}$ des $U(W_1)$-coinvariants de ω_{m_1,m_2} est une sous-représentation de l'induite non-normalisée $\natural - \mathrm{Ind}_{P_{m_2}}^{H_2}(\nu_{X_2,n_1})$.*

Remarque 5.1.2.3. On notera dans la suite $\Theta(1, W_2)$ la représentation $(\omega_{m_1,m_2})_{U(W_1)}$, qui est bien le plus grand quotient $1_{U(W_1)}$-isotypique de ω_{m_1,m_2}. Pour être tout à fait rigoureux, même si le caractère $1_{U(W_1)}$ n'est pas une représentation de $\mathrm{Rep}_R(H_1)$, comme $H_1 = U(W_1) \times R^\times$ quand W_2 est scindé, cette notation signifie que l'on considère – implicitement – le caractère $1_{H_1} : (g, \lambda) \in H_1 \mapsto \lambda \in R^\times$ qui lui est dans $\mathrm{Rep}_R(H_1)$.

Le cas général. La compréhension de l'induite du Corollaire 5.1.2.2 est une étape incontournable dans l'étude de la correspondance thêta. Celle-ci possède une filtration naturelle qui a d'abord été calculée dans le cas symplectique-orthogonal [Ral84] et qui a ensuite été étendue à toute paire réductive duale de type I [MVW87, Chap. 3, IV]. On se place dans un cadre légèrement plus général en étudiant l'induite normalisée $I(s) = \mathrm{Ind}_{P_{m_2}}^{H_2}(\nu_{X_2,s}) = \mathrm{ind}_{P_{m_2}}^{H_2}(\nu_{X_2,s})$ où $s \in \mathbb{Z}$ si D est commutatif (resp. $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ dans le cas des quaternions). Remarquons que ce cas englobe bien le précédent malgré l'utilisation de l'induite normalisée : en effet, le facteur de normalisation l'induite est toujours une puissance entière (resp. demi-entière) du caractère $|\det_{X_2}|^{\frac{1}{2}}$ d'après la Proposition 2.2.0.28.

Soient deux espaces ε_2-hermitiens W_{2_1} et W_{2_2} dans la même série de Witt. On leur associe l'espace hyperbolique :

$$W_2 = W_{2_1} \oplus (-W_{2_2}).$$

Quitte à échanger W_{2_1} et W_{2_2}, on peut supposer que leurs indices de Witt vérifient $m_{2_1} \leq m_{2_2}$. On pose alors $\delta_m = m_{2_2} - m_{2_1}$. Soit $X_1 \in \Omega(W_2)$ un lagrangien, $P_2 = P(X_2)$ le parabolique associé et $I(s)$ l'induite précédente. On plonge diagonalement $U(W_{2_1}) \times U(W_{2_2})$ dans $U(W_2)$, et on voit chacun de ces groupes comme un sous-groupe de $U(W_2)$. On note H_{2_1} et H_{2_2} les images réciproques de $U(W_{2_1})$ et $U(W_{2_2})$ dans H_2. On considère $I(s)$ comme une représentation de $H_{2_1} \times H_{2_2}$ en composant avec le morphisme de groupes $H_{2_1} \times H_{2_2} \twoheadrightarrow H_2$ donné par la multiplication dans H_2. On a alors :

Théorème 5.1.2.4. *Comme représentation de $H_{2_1} \times H_{2_2}$, la représentation $I(s)$ possède une filtration équivariante de la forme :*

$$0 \subset I_0(s) \subset I_1(s) \subset \cdots \subset I_{m_{2_1}}(s) = I(s).$$

Les quotients successifs sont donnés par :

$$\begin{aligned} J_t(s) &= I_t(s)/I_{t-1}(s) \\ &\simeq \operatorname{ind}_{P_t^1 \times P_{t+\delta_m}^2}^{H_{2_1} \times H_{2_2}} \Big((\nu_{{}_tY_1, s+t+\delta_m} \boxtimes \nu_{{}_tY_2, s+t}) \otimes C_c^\infty(U({}_tW_0)) \Big) \end{aligned}$$

où :

- *${}_tY_1$ est un sous-espace totalement isotrope de W_{2_1} de dimension t ;*
- *${}_tY_2$ est un sous-espace totalement isotrope de W_{2_2} de dimension $t + \delta_m$;*
- *${}_tW_0$ est dans la même série de Witt que W_{2_1} et W_{2_2}, de dimension $n_{2_1} - 2t = n_{2_2} - 2(t + \delta_m)$;*
- *P_t^i est le relevé à H_{2_i} du parabolique $P({}_tY_i)$ stabilisant ${}_tY_i$ et de Levi $GL({}_tY_i) \times U({}_tW_0)$;*
- *les notations pour les caractères $\nu_{{}_tY_1,-}$ et $\nu_{{}_tY_2,-}$ sont reprises du Théorème 5.1.2.1 ;*
- *$U({}_tW_0) \times U({}_tW_0)$ agit sur $C_c^\infty(U({}_tW_0))$ par $(u, u').f(v) = f(u^{-1}vu')$.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.1.0.18, l'application $g \mapsto g^{-1}(X_2)$ induit une identification $P_2 \backslash H_2 \simeq \Omega(W_2)$. L'action de $H_{2_1} \times H_{2_2}$ à droite donne la décomposition en doubles orbites du Corollaire 2.1.0.21 :

$$P(X_2)\backslash U(W_2)/(U(W_{2_1}) \times U(W_{2_2})) \simeq P_2\backslash H_2/(H_{2_1} \times H_{2_2}) = \coprod_{t=0}^{m_{2_1}} \mathcal{O}_t$$

où $\mathcal{O}_t = \{Y \in \Omega(W_2) \mid \dim(Y \cap W_{2_2}) = t\} = \{Y \in \Omega(W_2) \mid \dim(Y \cap W_{2_1}) = \delta_m + t,\ \dim(Y \cap W_{2_2}) = t\}$.

Comme dans [KR05], on peut exhiber des éléments w_t assez élémentaires qui appartiennent aux différentes orbites $\mathcal{O}_t$. Il suffit en effet de choisir un lagrangien dans $\mathcal{O}_t$, puis de choisir une base intelligemment pour écrire explicitement un élément w_t. Par exemple, en choisissant deux sous-espaces totalement isotropes maximaux X_{2_1} et X_{2_2} de W_{2_1} et W_{2_2}, ainsi que leurs duaux $X_{2_1}^*$ et $X_{2_2}^*$. Alors $W_{2_i} = (X_{2_i} + X_{2_i}^*) + W'_{2_i}$ avec W'_{2_1} et W'_{2_2} tous deux isométriques. On note $e_1^1, \ldots, e_{m_{2_1}}^1$ une base de X_{2_1}, et $e_1^2, \ldots, e_{m_{2_2}}^2$ de X_{2_2}, ainsi que $e_1^{1*}, \ldots, e_{m_{2_1}}^{1*}$. pour $X_{2_1}^*$, de même pour $X_{2_2}^*$. Enfin, pour $0 \leq t \leq m_{2_1}$, on pose ${}_tX_{2_1}$ le sous-espace de X_{2_1} engendré par les t premiers vecteurs. Idem pour X_{2_2}, ainsi que pour les espaces duaux. Finalement, on a $W_{2_2} = ({}_{t+\delta_m}X_{2_2} + {}_{t+\delta_m}X_{2_2}^*) + {}_{t+\delta_m}W'_{2_2}$ et $W_{2_1} = ({}_tX_{2_1} + {}_tX_{2_1}^*) + {}_tW'_{2_1}$ avec ${}_{t+\delta_m}W'_{2_2}$ et ${}_tW'_{2_1}$ isométriques à un même espace ε-hermitien ${}_tW_0$. Pour rappel, $W_2 = W_{2_1} \oplus (-W_{2_2})$ est scindé, et dans ${}_tW'_{2_1} \oplus (-{}_{t+\delta_m}W'_{2_2}) \simeq {}_tW_0 \oplus (-{}_tW_0)$, la diagonale $\Delta({}_tW_0) = \{(w_0, w_0) \mid w_0 \in {}_tW_0\}$ et l'antidiagonale $\Delta^-({}_tW_0) = \{(w_0, -w_0) \mid w_0 \in {}_tW_0\}$ sont deux sous-espaces totalement isotropes maximaux de ${}_tW_0 \oplus (-{}_tW_0)$, duaux l'un de l'autre. On prend pour w_t un qui réalise l'isomorphisme $p \in P(X_2) \overset{\sim}{\longmapsto} w_t p w_t^{-1} \in P({}_tX_{2_1} + {}_{t+\delta_m}X_{2_2} + \Delta({}_tW_0))$. Le plus simple est de choisir une base de X_2, d'envoyer les t premiers vecteurs de X_1 sur la base canonique de ${}_tX_{2_1}$, les $t + \delta_m$ suivants sur celle de ${}_{t+\delta_m}X_{2_2}$, puis les derniers sur une base de $\Delta({}_tW_0)$. Un représentant de $\mathcal{O}_t$ est donc w_t^{-1}.

On applique la version simplifiée du lemme géométrique (Théorème 1.1.5.1) avec $P = P_2$, $G = H_2$, $N = H_{2_1} \times H_{2_2}$, $\sigma = \nu_{X_1,s}$ et $\delta_U = \delta_{N(X_2)}$. En notant St_t le stabilisateur de Pw_t^{-1}

dans N, il vient :

$$\Phi_{\mathcal{O}_t}(\sigma) = \natural - \mathrm{ind}_{\mathrm{St}_t}^{N}(w_t \circ (\delta_U^{\frac{1}{2}} \nu_{X_1,s})|_{M'}).$$

Donnons une description plus explicite de St_t. Si on regarde son image directe par la projection $p : \widetilde{\mathrm{Sp}}(W_2) \to \mathrm{Sp}(W_2)$, on obtient $p(\mathrm{St}_t) = w_t P(X_2) w_t^{-1} \cap p(N)$ où $p(N) = U(W_{2_1}) \times U(W_{2_2})$ est un groupe réductif. On note la projection sur le premier facteur $\pi_1 : p(N) \to U(W_{2_1})$. On a alors des inclusions $\pi_1(w_t P_1 w_t^{-1} \cap p(N)) \subset P({}_tX_{2_1}) \subset U(W_{2_1})$. En effet pour tout $u = (u_1, u_2) \in p(\mathrm{St}_t)$ tel que $u_1 = w_t p_1 w_t^{-1}$, on a l'égalité :

$$u_1({}_tX_{2_1}) = w_t p_1 w_t^{-1}({}_tX_{2_1}) \cap W_{2_1} = w_t p_1({}_tX_1) \cap W_{2_1} = (w_t X_1) \cap W_{2_1} = {}_tX_{2_1}.$$

On procède de même pour H_{2_2}. Et donc :

$$p(\mathrm{St}_t) \subset P({}_tX_{2_1}) \times P({}_{t+\delta_m}X_{2_2}) \subset U(W_{2_1}) \times U(W_{2_2}).$$

On pose ${}_tY_1 = {}_tX_{2_1}$ et ${}_tY_2 = {}_{t+\delta_m}X_{2_2}$. Le Corollaire 2.1.0.21 donne que le stabilisateur est obtenu comme le produit fibré de $P({}_tY_1)$ et $P({}_tY_2)$ au-dessus de $U({}_tW_0)$:

$$\begin{tikzcd} p(\mathrm{St}_t) \arrow[r] \arrow[d] & P({}_tY_1) \arrow[d] \\ P({}_tY_2) \arrow[r] & U({}_tW_0) \end{tikzcd}$$

Ensuite, de $w_t N(X_2) w_t^{-1} \cap (U(W_{2_1}) \times U(W_{2_2})) = N({}_tY_1) \times N({}_tY_2)$, on tire de la Proposition 2.2.0.28 que $w_t \circ (\delta_{N(X_2)}|_{M'}) = \delta_{N({}_tY_1)} |\det_{{}_tY_1}|^{t+\delta_m} \otimes \delta_{N({}_tY_2)} |\det_{{}_tY_2}|^{t}$ en tant que caractère de $P({}_tY_1) \times P({}_tY_2)$, ce qui permet de passer à l'induite parabolique normalisée. Sauf dans le cas $m_{2_1} = m_{2_2}$ et $t = 0$, le stabilisateur d'une orbite $\mathcal{O}_t$ est contenu dans le sous-groupe $P^1_{t+\delta_m} \times P^2_t$, et contient lui-même le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique propre de $H_{2_1} \times H_{2_2}$. Ainsi :

$$\Phi_{\mathcal{O}_t}(\sigma) = \mathrm{ind}_{P^1_t \times P^2_{t+\delta_m}}^{H_{2_1} \times H_{2_2}} \left(\nu_{{}_tY_1, s+t+\delta_m} \otimes \nu_{{}_tY_2, s+t} \otimes (\natural - \mathrm{ind}_{\mathrm{St}_t}^{P^1_t \times P^2_{t+\delta_m}} 1) \right).$$

Pour finir, le seul terme à décrire est $\natural - \mathrm{ind}_{\mathrm{St}_t}^{P^1_t \times P^2_{t+\delta_m}}(1)$. Étant donnée la forme de St_t, celle-ci est isomorphe à $\natural - \mathrm{ind}_{U({}_tW_0)}^{U({}_tW_0) \times U({}_tW_0)}(1)$ où $U({}_tW_0)$ est plongé diagonalement dans le produit. Or, pour le plongement diagonal $G \to G \times G$, l'induite $\natural - \mathrm{ind}_G^{G \times G}(1)$ est isomorphe à $C_c^\infty(G)$, où l'action de $G \times G$ provient de l'action naturelle par multiplication à gauche et à droite. D'où le résultat.

Dans le cas exceptionnel évoqué $\delta_m = t = 0$, on a $p(\mathrm{St}_0) = U(W_0) \simeq U(W_{2_1}) \simeq U(W_{2_2})$. On plonge $U(W_0)$ diagonalement dans le produit $U(W_{2_1}) \times U(W_{2_2})$ et l'action de $(g_1, g_2) \in U(W_{2_1}) \times U(W_{2_2})$ est donnée par $x \mapsto g_1 x {g_2}^{-1}$. Et on obtient la représentation $C_c^\infty(U(W_0))$. □

Le cas souvent rencontré. Soit W un espace ε-hermitien de dimension n. On pose $W_{2_1} = W_{2_2} = W$ et $W_2 = W + (-W)$. Soit $\Delta W = \{(w, w) \in W_2 \mid w \in W\}$. C'est un lagrangien de W_2 et on note P_2 l'image réciproque de $P(\Delta W)$ dans H_2. Comme précédemment, H_{2_1} et H_{2_2} désigne les images réciproques de $U(W_{2_1})$ et $U(W_{2_2})$ dans H_2. Les groupes H_{2_1} et H_{2_2} sont canoniquement isomorphes, on les note donc H indifféremment. On obtient ainsi pour la représentation $I(s) = \mathrm{ind}_{P_2}^{H_2}(\nu_{X_2,s})$:

Lemme 5.1.2.5. *Comme représentation de $H \times H$, la représentation $I(s)$ possède une filtration équivariante de la forme :*

$$0 \subset I_0(s) \subset I_1(s) \subset \cdots \subset I_n(s) = I(s)$$

dont les quotients successifs sont :

$$\begin{aligned} R_t(s) &= I_t(s)/I_{t-1}(s) \\ &= \mathrm{ind}_{P_t \times P_t}^{H \times H}\Big((\nu_{tX,s+t} \boxtimes \nu_{tX,s+t}) \otimes C_c^\infty(U(_tW)) \Big). \end{aligned}$$

5.1.3 Deuxième filtration (Kudla), foncteurs de Jacquet

Filtration. Soit $(U(W_1), U(W_2))$ une paire duale de type I dans $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2)$. Soit $(W_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la tour de Witt construite sur W_1^0 telle que $W_1 = W_1^{m_1}$. On se fixe un drapeau totalement isotrope complet $(X_{1_k})_{0\le k\le m_1}$ de W_1 ainsi qu'un drapeau dual $(X_{1_k}^*)_{0\le k\le m_1}$ de sorte que $W_1 = X_{1_k} + W_1^{m_1-k} + X_{1_k}^*$. La donnée de $(X_{1_k})_{0\le k\le m_1}$ détermine l'ensemble des paraboliques standards, alors que la donnée supplémentaire du drapeau dual détermine l'ensemble des Levi standards. On note $P(X_{1_k})$ le sous-groupe parabolique maximal de $U(W_1)$ qui stabilise X_{1_k}. Son Levi est de la forme $\mathrm{GL}(X_{1_k}) \times U(W_1^{m_1-k})$, et son radical unipotent $N(X_{1_k})$ s'insère dans la suite exacte :

$$1 \to N_1(X_{1_k}) \to N(X_{1_k}) \to \mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k}) \to 1$$

où $N_1(X_{1_k}) \subset N(X_{1_k})$ est central, avec égalité dans cette dernière inclusion si et seulement W_1 est scindé et $k = m_1$. Enfin, pour $j \le k$, on note $Q_k(X_{1_j})$ le sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}(X_{1_k})$ qui stabilise X_{1_j}. Il a une décomposition en parabolique standard de $\mathrm{GL}(X_{1_k})$, en effet, son Levi standard est de la forme $\mathrm{GL}(X_{1_j}) \times \mathrm{GL}(X_j^k)$ où $X_j^k = X_{1_k} \cap (X_{1_j} + X_{1_j}^*)^\perp$ est le supplémentaire de X_{1_j} dans X_{1_k} déterminé par ces données. On adopte des notations similaires pour W_2.

Dans la suite, R_{1_k} désigne le foncteur de Jacquet normalisé associé au sous-groupe parabolique $P_k^{m_1} = M_k^{m_1} \ltimes N(X_{1_k})$ de H_1. À un caractère près de $M(X_{1_k})$, qui sert à la normalisation du foncteur de Jacquet, connaître R_{1_k} à calculer les coinvariants vis-à-vis de $N(X_{1_k})$. On va utiliser la suite exacte précédente pour découper ce calcul en deux étapes : d'abord en prenant les coinvariants vis-à-vis du sous-groupe central $N_1(X_{1_k})$, puis en terminant avec la partie restante vis-à-vis de $\mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})$.

Théorème 5.1.3.1. *Soit $k \in [\![0, m_1]\!]$. On pose $r = \min(k, m_2)$. Les coinvariants admettent une filtration :*

$$R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2}) = R^0 \supset R^1 \supset \cdots \supset R^r \supset R^{r+1} = 0$$

dont les quotients successifs $J_t = R^t/R^{t+1}$ sont donnés explicitement :

$$J_t = \mathrm{ind}_{Q_{k-t}^k \times H_1^{m_1-k} \times P_t^{m_2}}^{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \times H_2} \big(\xi_t \otimes C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X_t^k, X_{2_t})) \otimes \omega_{m_1-k,m_2-t}\big)$$

où :

- *Q_{k-t}^k est le parabolique de $G_k^{m_1}$ qui stabilise $X_{1_{k-t}}$, image réciproque dans H_1 de $Q_k(X_{1_{k-t}})$;*
- *le caractère ξ_t est donné par $\nu_{X_{1_{k-t}},s+(k-t)} \otimes \nu_{X_t^k,s+t} \otimes \nu_{X_{2_t},-s+t-2k}$ avec $s = n_2 - n_1 + \eta_1$;*

— *le groupe* $GL(X_t^k) \times GL(X_{2_t})$ *agit sur* $C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X_t^k, X_{2_t}))$ *via* $((g_1, g_2).f)(g) = f(g_2^{-1} x g_1)$.

En particulier, si $m_2 \geq k$*, alors* $J_r = J_k$ *est une sous-représentation de* $R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2})$ *de la forme :*

$$J_k \cong \mathrm{Ind}_{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \times P_t^{m_2}}^{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \times H_2} \Big(C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X_{1_k}, X_{2_k})) \otimes \omega_{m_1-k, m_2-k} \Big).$$

Démonstration. Soit (ω, S) le modèle de Schröndinger mixte associé à la décomposition suivante

$$\begin{aligned} W = W_1 \otimes W_2 \quad &= \quad X_{1_k} \otimes W_2 \quad + \quad W_1^{m_1-k} \otimes W_2 \quad + \quad X_{1_k}^* \otimes W_2 \\ &= \qquad X_k \qquad + \qquad W_{X_k} \qquad + \qquad X_k^*. \end{aligned}$$

On note (ρ_ψ^k, S_k) le modèle de la représentation métaplectique de $H(W_{X_k}, <,>)$. On identifie les espaces $\mathcal{S}(X_k^*) \otimes S_k$ et $\mathcal{S}(X_k^*, S_k)$; ainsi que X_k^* à $\mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2)$. Ainsi :

$$S \simeq \mathcal{S}(\mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2), S_k).$$

On a le lemme suivant :

Lemme 5.1.3.2. *On a un isomorphisme de* $P_k^{m_1} \times H_2$*-module :*

$$S_{N_1(X_{1_k})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(Z, S_k)$$

où Z *est le fermé de* $X_k = \mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2)$ *constitué des morphismes* x *dont l'image* $x(X_{1_k}) \subset W_2$ *est un espace totalement isotrope.*

L'espace Z *possède une stratification* $Z = \bigsqcup_{t=0}^r Z_t$ *où les* Z_k *sont des orbites sous l'action de* $P_k^{m_1} \times H_2$*, indexées par le rang des éléments de* Z *i.e. par* $0 \leq \dim x(X_{1_k}) \leq r = \min(k, m_2)$*. On note* T *la représentation* $\mathcal{S}(Z, S_k)$*. Cette stratification induit une filtration sur* T *:*

$$T = T^{(0)} \supset T^{(1)} \supset \dots T^{(r)} \supset \{0\}$$

où les quotients successifs $T_t = T^{(t)}/T^{(t+1)}$ *sont explicites et de la forme :*

$$T_t \simeq \mathcal{S}(Z_t) \otimes S_k.$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer le lemme de [MVW87, Chap 3. V.1.] qui relie les coinvariants avec le lieu des points de $\mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2)$ où l'action sur la fibre S_k est triviale. Le groupe $N_1(X_{1_k})$ agit trivialement sur $\mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2)$, et l'action sur la fibre S_k au point $x \in \mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2)$ est donnée par le caractère $n(s) \mapsto \psi(\frac{<x \circ s, x>}{2})$. D'après [MVW87, Chap. 3 V.3.], Z est exactement l'ensemble des éléments de $\mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2)$ pour lesquels ce caractère est trivial. Cela donne la première assertion.

Pour expliciter la situation, l'action de $P_k^{m_1} \times H_2$ sur Z est $((p, \lambda), (h_2, \lambda')).x = h_2^{-1} \circ x \circ p$. Elle se factorise donc par $\mathrm{GL}(X_{1_k}) \times U(W_2)$. Les orbites pour cette action sont constituées des éléments de même rang. Soit $x_t \in \mathrm{Hom}(X_{1_k}, W_2)$ de noyau $X_{1_{k-t}}$ et d'image $X_{2_t} = x_t(X_t^k)$ où X_t^k est un supplémentaire de $X_{1_{k-t}}$ dans X_{1_k}. L'orbite de x_t est Z_t, et le stabilisateur de x_t est contenu dans $Q_k(X_{1_{k-t}}) \times P(X_{2_t})$, dont les Levi respectifs sont $\mathrm{GL}(X_{1_{k-t}}) \times \mathrm{GL}(X_t^k)$ et $\mathrm{GL}(X_{2_t}) \times U(W_{X_{2_t}})$. L'action sur x_t se factorise à nouveau par $\mathrm{GL}(X_t^k) \times \mathrm{GL}(X_{2_t})$, et le stabilisateur est constitué des éléments (a_1, a_2) tels que

$a_2^{-1} \circ x_t \circ a_1 = x_t$. On considère l'action du groupe $(M_k^{m_1} \ltimes \mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})) \times H_2$ sur $T_t = S(Z_t, S_k) = S(Z_t) \otimes S_k$. La représentation T_t est isomorphe à $\natural - \mathrm{ind}_{\mathrm{St}_{x_t}}^{M_k^{m_1} \times H_2}(S_k|_{x_t})$ où $S_k|_{x_t}$ est l'action du groupe St_{x_t} sur la fibre S_k en $x_t \in Z$. Conformément aux formules de la Section 4.2.1 sur le modèle de Schrödinger mixte, le groupe $M_k^{m_1} \times H_2$ agit sur S_k via $\nu_{X_{1_k}, n_2} \otimes \omega_{m_1-k,m_2}$ et le groupe $\mathrm{Hom}(W^{m_1-k}, X_{1_k})$ agit par $n_2(h) \mapsto \rho_\psi^k((x_t \circ h, 0))$ où $(x_t \circ h, 0)$ est un élément du groupe d'Heisenberg $H(W_{X_k})$. Enfin, comme S_k est une représentation de $P_k^{m_1} \times H_2$, on peut réécrire :

$$T_t = \natural - \mathrm{ind}_{Q_{k-t}^k \times P_t^{m_2}}^{M_k^{m_1} \times H_2} (\natural - \mathrm{ind}_{\mathrm{St}_{x_t}}^{Q_{k-t}^k \times P_t^{m_2}} (1) \otimes S_k).$$

On obtient alors une induite, qui n'est pas parabolique, car le radical unipotent de $P_t^{m_2}$ n'agit pas trivialement sur ω_{m_1-k,m_2} :

$$T_t = \natural - \mathrm{ind}_{Q_{k-t}^k \times H_1^{m_1-k} \times P_t^{m_2}}^{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \times H_2} (C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X_t^k, X_{2_t})) \otimes \nu_{X_{1_{k-t}}, n_2} \otimes \nu_{X_t^k, n_2} \otimes \omega_{m_1-k,m_2}).$$

□

Si $N_1(X_{1_k}) = N(X_{1_k})$, on peut s'arrêter là. Sinon, on peut réaliser la représentation T_t à l'aide d'un modèle de $(S_k, \omega_{m_1-k,m_2})$ pour connaître $(\omega_{m_1,m_2})_{N(X_{1_k})}$. Réalisons S_k comme la représentation de Schrödinger mixte associée à la décomposition $W_2 = X_{2_t} + W_{X_{2_t}} + X_{2_t}{}^*$:

$$\begin{array}{ccccccc} W_{X_k} & = & W_1^{m_1-k} \otimes X_{2_t} & + & W_1^{m_1-k} \otimes W_{X_{2_t}} & + & W_1^{m_1-k} \otimes X_{2_t}{}^* \\ & = & X_{k,t} & + & W_{k,t} & + & X_{k,t}^* \end{array}$$

Ainsi, en recommençant comme précédemment, on réalise S_k à l'aide du modèle mixte $\mathcal{S}(X_{k,t}^*, S_{k,t}) = S(\mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{2_t}^*), S_{k,t})$, qui est donc une représentation de $(H_1^{m_1-k} \ltimes \mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})) \times P_t^{m_2}$. L'action d'un élément de $\mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})$ est donnée par les formules du modèle de Schröndinger mixte de la représentation métaplectique. L'action d'un élément $x_t \circ h \in \mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{2_t})$ est alors $\rho_\psi^0((x_t \circ h, 0)).f(y) = \psi(< y, x_t \circ h >) f(y)$. Le lieu des $y \in \mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{2_t}^*)$ pour lequel l'action est triviale sur la fibre $S_{k,t}$ est donc réduit à $\{0\}$. On en déduit par le lemme de [MVW87, Chap 3. V.1.] que les coinvariants pour l'action du groupe $\mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})$ sont $\mathcal{S}(\{0\}, S_{k,t}) \simeq S_{k,t}$. Donc :

$$(\omega_{m_1-k,m_2})_{\mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})} = S_{k,t} = \nu_{X_{2_t}, n_1-2k} \otimes \omega_{m_1-k,m_2-t}.$$

Par la Proposition 1.1.6.14, on déduit que :

$$(T_t)_{\mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})} = \natural - \mathrm{ind}_{Q_{k-t}^k \times H_1^{m_1-k} \times P_t^{m_2}}^{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \times H_2} (C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X_t^k, X_{2_t})) \otimes \xi_0 \otimes \omega_{m_1-k,m_2-t})$$

où $\xi_0 = \nu_{X_{1_{k-t}}, n_2} \otimes \nu_{X_t^k, n_2} \otimes \nu_{X_{2_t}, n_1-2k}$. Or $R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2}) \simeq \delta_{N(X_{1_k})}^{-\frac{1}{2}} \otimes (\omega_{m_1,m_2})_{N(X_{1_k})}$. Il reste alors à donner l'expression normalisée de $J_t = (T_t)_{\mathrm{Hom}(W_1^{m_1-k}, X_{1_k})}$:

$$J_t = \mathrm{ind}_{Q_{k-t}^k \times H_1^{m_1-k} \times P_t^{m_2}}^{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \times H_2} (\xi \otimes C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X_t^k, X_{2_t})) \otimes \omega_{m_1-k,m_2-t})$$

où $\xi = \nu_{X_{1_{k-t}}, n_2-n_1+\eta_1+(k-t)} \otimes \nu_{X_t^k, n_2-n_1+\eta_1+t} \otimes \nu_{X_{2_t}, n_1-n_2+\eta_2+t-2k}$ avec $\eta_1 = -\eta_2$, soit en notant $s = n_2 - n_1 + \eta_1$, le caractère devient $\xi = \nu_{X_{1_{k-t}}, s+(k-t)} \otimes \nu_{X_t^k, s+t} \otimes \nu_{X_{2_t}, -s+t-2k}$. □

Remarque 5.1.3.3. Dans [MVW87, p. 70], l'induite n'est pas normalisée, cependant on remarquera que le ξ_0 de notre preuve correspond au leur. En effet, il y a égalité des restrictions des caractères $\nu_{X_t^k,n_2} \otimes \nu_{X_{2_t},n_1-2k}$ et $\nu_{X_t^k,n_2+n_1-2k} \otimes 1$ au stabilisateur de x_t. Comme précisé dans [MVW87, p.75], on peut choisir arbitrairement le caractère $\chi_1 \otimes \chi_2$ qui relève celui du stabilisateur ν_{t,n_1+n_2-2k}.

Remarque 5.1.3.4. Les formules de Kudla sont différentes des nôtres car l'action qui y est considérée consiste à multiplier à gauche par la transposée – comparer la formule [Kud86, (5.20)] avec notre stabilisateur – et non par l'inverse, qui est la convention adoptée tout le long de ce travail.

5.2 Conséquences des filtrations

Le corps R sera dorénavant supposé algébriquement clos. Cette condition assure que l'on peut définir pour $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1})$ (admissible) le plus grand quotient π_1-isotypique (cf. Section 1.1.6) de la représentation de Weil ω_{m_1,m_2} pour le groupe $H_1^{m_1} \times H_2^{m_2}$ comme une représentation de $H_2^{m_2}$. Comme représentation de $H_1^{m_1} \times H_2^{m_2}$, le plus grand quotient π-isotypique est un produit tensoriel de deux représentations de chacun de ces groupes d'après le Lemme 1.1.6.4. Il est de la forme $\pi_1 \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ où $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \in \mathrm{Rep}_R(H_2^{m_2})$.

Avant de commencer, on rappelle simplement les résultats généraux obtenus à l'aide des filtrations dans le cas des paires duales de type I pour des représentations à coefficients complexes. La suite sera une discussion autour de la validité de chacun de ses points pour les représentations modulaires.

Théorème 5.2.0.5 ([Kud86],[MVW87])**.** *Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(H_1)$. Alors :*
(i) il existe $m_2(\pi_1) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \neq 0 \Leftrightarrow m_2 \geq m_2(\pi_1) \ ;$$

(ii) pour tout $m_2 \in \mathbb{N}$, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est de longueur finie ;
(iii) On suppose que π_1 est cuspidale.
(a) la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est cuspidale ;
(b) pour tout $m_2 \geq m_2(\pi_1)$, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est irréductible ;
(c) si $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est cuspidale, alors $m_2 = m_2(\pi_1)$;
(iv) plus généralement, on sait calculer le support cuspidal de tout quotient irréductible de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$.

Remarque 5.2.0.6. Les preuves de ces résultats exploitent les filtrations de Kudla et de Rallis de la Section 5.1. Excepté pour l'indice de première occurrence $m_2(\pi_1)$, on établit d'abord ces faits pour les représentations cuspidales, duquel on déduit ensuite les propriétés de longueur finie et de calcul du support cuspidal dans le cas général.

5.2.1 Tours de Witt et indice d'occurrence

Indice de première occurence. On obtient le théorème classique donnant l'existence de l'indice de première occurrence, ainsi que l'existence de relevés – aussi appelés theta-lifts dans la littérature – non-triviaux au-dessus de cet indice. On reprend les notations de la partie précédente, soit W_2^0 un espace ε-hermitien anisotrope ou nul, et soit $W_2^{m_2}$ l'espace ε-hermitien d'indice de Witt m_2 parcourant la série de Witt construite sur W_2^0. Pour

$m_1 \in \mathbb{N}$ fixé, on pose $W_1 = W_1^{m_1}$ et $H_1 = H_1^{m_1}$. Pour rappel, $(U(W_1), U(W_2^{m_2}))$ est une paire duale dans $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2^{m_2})$.

Théorème 5.2.1.1. *Pour tout $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$ admissible, il existe un plus petit entier naturel $m_2(\pi_1)$ tel que pour tout $m_2 \geq m_2(\pi_1)$, on ait $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \neq 0$. De plus, on a $m_2(\pi_1) \leq n_1$.*

Démonstration. Il suffit de prouver les deux faits suivants : π_1 est quotient de ω_{m_1,n_1} ; et si $m_2 \geq m_2'$, ω_{m_1,m_2} se surjecte sur $\omega_{m_1,m_2'}$. Soit $W_1 \otimes W_2 = W_1 \otimes X_2 + W_1 \otimes W_{X_2} + W_1 \otimes X_2^*$ une décomposition de $W_1 \otimes W_2$ où X_2 est un sous-espace isotrope de dimension k. Le modèle de Schrödinger mixte (cf. Section 4.2.1) associé s'identifie alors à $\mathcal{S}(\mathrm{Hom}_D(X_2, W_1)) \otimes S^k$. On considère l'action naturelle de $U(W_1)$ sur $\mathrm{Hom}_D(X_2, W_1)$. Remarquons ensuite qu'étant donnée une orbite fermée A pour cette action, la restriction à ladite orbite fournit une H_1-surjection de $\mathcal{S}(\mathrm{Hom}_D(X_2, W_1))$ sur $\mathcal{S}(A)$. Ce dernier est isomorphe à $\natural - \mathrm{ind}_{St_x}^{H_1}(1)$ via le choix d'un élément x de l'orbite A. On peut produire toute une variété d'orbites fermées en s'inspirant de l'appendice de Rallis [Ral84] : montrons donc que l'orbite d'un élément $x \in \mathrm{Hom}_D(X_2, W_1)$ d'image non-dégénérée est fermée. Soit $u_n = g_n.x$ une suite de $A = U(W_1).x$ qui converge vers $a \in \mathrm{Hom}_D(X_2, W_1)$. On note k la dimension de l'image de x, et on choisit une base $(e_{2_1}, \dots, e_{2_{m_2}})$ telle que $(x(e_{2_i}))_{1 \leq i \leq d}$ soit une base hermitienne de l'image de x, et la queue $(e_{2_i})_{k+1 \leq i \leq m_2}$ – possiblement vide – engendre le noyau de x. On voit facilement que Ker a = Ker x. Ensuite, on a pour tout i, j :

$$< (g_n.x)(e_{2_i}), (g_n.x)(e_{2_j}) > \underset{n \to \infty}{\to} < a(e_{2_i}), a(e_{2_j}) > .$$

Comme $g_n \in U(W_1)$, le membre de gauche est simplement $< x(e_{2_i}), x(e_{2_j}) >$ *i.e.* constant. D'où $< x(e_{2_i}), x(e_{2_j}) >=< a(e_{2_i}), a(e_{2_j}) >$. Le groupe $U(W_1)$ agit transitivement sur les bases hermitiennes. En particulier, il existe $u \in U(W_1)$ tel que $a = u.x$. Le stabilisateur d'une telle orbite est un sous-groupe de $U(W_1)$, noté $U(V_1)$, tel que $V_1^{\perp}$ soit l'image de x. On note $\overline{U(V_1)}$ l'image réciproque de $U(V_1)$ dans H_1. Ainsi, la représentation ω_{m_1,m_2} admet comme quotient :

$$\natural - \mathrm{ind}_{\overline{U(V_1)}}^{H_1}(1) \otimes \omega_{m_1,m_2-k} = \natural - \mathrm{ind}_{\overline{U(V_1)}}^{H_1}(\omega_{m_1,m_2-k}|_{\overline{U(V_1)}})$$

En prenant $m_2 = n_1$ et $k = m_2$, on obtient que $U(V_1)$ est trivial. La représentation précédente est alors la représentation régulière, et elle admet comme quotient n'importe quelle représentation π_1 de H_1 d'après le Lemme 1.1.6.7. Si l'on prend maintenant $k = m_2 - m_2'$, on obtient la surjection désirée via $\natural - \mathrm{ind}_{\overline{U(V_1)}}^{H_1}(1) \to 1$. □

5.2.2 Le cas π_1 cuspidale

Dans le cas modulaire, une représentation irréductible cuspidale d'un groupe réductif à centre compact n'est pas forcément projective, ni injective. Cela conduit à des changements majeurs dans les énoncés de la correspondance. Principalement parce que l'on perd la garantie que le foncteur des π_1-coninvariants soit exact, ce qui n'est assuré que si π_1 est injective d'après la Proposition 1.1.6.11. En sens inverse, l'utilisation récurrente du fait que les représentations complexes irréductibles cuspidales de $H_2^{m_2}$ sont projectives pose également problème ici, puisque que cela se révèle faux en général dans le cas modulaire. Les hypothèses de banalité (cf. Définition 1.2.3.1) que l'on fait présentent toujours des limites quand la caractéristique ℓ de R est positive. En effet, à partir d'un indice m_2 suffisamment grand dans la tour de Witt, la caractéristique ℓ divisera le pro-ordre de $U(W_2^{m_2})$. Donc les preuves calquées sur le cas complexe échouent à partir d'un certain rang dans la tour, ce qui donne lieu à la définition suivante.

Définition 5.2.2.1. On note $m_2(\text{ban})$ le plus grand indice avant que cette situation n'arrive c'est-à-dire le plus grand entier de $\{m_2 \in \mathbb{N} \mid \ell \text{ est banal vis-à-vis de } U(W_2^{m_2})\}$. Par convention, $m_2(\text{ban}) = +\infty$ si l'on a $l = 0$.

À cause de ce phénomène quand $\ell \neq 0$, la preuve de l'irréductibilité de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ échoue au-delà de cet indice $m_2(\text{ban})$. La situation se révèle donc un peu moins satisfaisante que dans le cas complexe. Cependant, on donne des conditions pour que les représentations $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ soient de longueur finie, ce qui, en définitive, constitue une propriété importante en général. Elle assure notamment l'existence d'un quotient irréductible non nul ainsi que l'admissibilité de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$.

Première occurrence et cuspidalité. Commençons par un résultat d'ordre général dont on déduira plusieurs corollaires dans le cas banal. On rappelle [Vig96, I.7.10] un résultat que l'on utilise dans l'énoncé suivant : une représentation irréductible admissible projective d'un groupe localement profini G est un objet injectif dans $\text{Rep}_R(G)$ à condition que R soit algébriquement clos et qu'il existe un compact ouvert de G dont le pro-ordre est inversible dans R. Les hypothèses sur R garantissent la validité de ce résultat dans le présent contexte.

Théorème 5.2.2.2. *On pose $s = n_2 - n_1 + \eta_1$. Soit $\pi_1 \in \text{Irr}_R^{\text{cusp}}(H_1)$.*

(i) *Pour tous entiers naturels m_2 et k, on a (avec égalité si π_1 est injective) :*

$$\nu_{k,-s+k} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2-k}) \twoheadrightarrow R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})).$$

En particulier, $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est cuspidale.

(ii) *On suppose que π_1 est projective. S'il existe m_2 tel que $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ admet un sous-quotient irréductible cuspidal projectif π_2, alors :*

$$m_2 = m_2(\pi_1) \text{ et } \pi_2 = \Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)}).$$

Ce sera de plus l'unique quotient cuspidal dans la tour de Witt au sens où :

$$\text{si } \Theta(\pi_1, W_2^{m_2'}) \text{ admet un quotient cuspidal non nul } \tau, \text{ alors } m_2' = m_2(\pi_1) \text{ et } \tau = \Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)}).$$

Démonstration.

[(i)] Soit $\pi_1 \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ le plus grand quotient π_1-isotypique de ω_{m_1,m_2}. Comme le foncteur de Jacquet R_{2_k} est exact, on a que $R_{2_k}(\pi_1 \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2})) = \pi_1 \otimes R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}))$ est quotient de $R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})$, donc se factorise par $R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})_{\pi_1}$. En étudiant les sous-quotients de la filtration de $R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})$, on a que $\text{Hom}_{H_1}(R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})/J_0, \pi_1) = \{0\}$ puisque π_1 est cuspidale. Donc $(R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})/J_0)_{\pi_1} = \{0\}$. D'après la Proposition 1.1.6.11, le foncteur que $V \mapsto V_{\pi_1}$ est exact à droite (resp. exact si π_1 est injective). De la suite exacte courte $0 \to J_0 \to R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2}) \to R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})/J_0 \to 0$, on tire une surjection (resp. un isomorphisme) :

$$(J_0)_{\pi_1} \twoheadrightarrow R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})_{\pi_1}.$$

On obtient le résultat en composant par $R_{2_k}(\omega_{m_1,m_2})_{\pi_1} \twoheadrightarrow \pi_1 \otimes R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}))$ et en remarquant que :

$$(J_0)_{\pi_1} = \pi_1 \otimes \left(\nu_{k,-s+k} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2-k})\right).$$

Enfin, ces surjections impliquent que $R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})) = 0$ pour tout $k > 0$ par définition du premier indice d'apparition. Comme tout parabolique est inclus dans un parabolique maximal, cela suffit pour conclure que $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est cuspidale.

[(ii)] S'il existe π_2 irréductible cuspidale projective qui est sous-quotient de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$, alors d'après la discussion qui précède le théorème, la représentation π_2 est également injective. Cela signifie que π_2 est un quotient de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$. On peut dont supposer qu'il existe une représentation irréductible π_2 cuspidale projective telle que $\pi_1 \otimes \pi_2$ soit quotient de ω_{m_1,m_2}. Soit π_2' une représentation cuspidale telle que $\pi_1 \otimes \pi_2'$ soit quotient de $\omega_{m_1,m_2'}$. On insiste sur le fait que π_2' n'est pas supposée irréductible. On va montrer que $m_2 = m_2'$ et $\pi_2 = \pi_2'$. D'après la Proposition 1.1.6.10, la représentation $\pi_1 \otimes \pi_2$ est projective et sa contragrédiente $\pi_1^\vee \otimes \pi_2^\vee$ est injective. Comme $\pi_1^\vee \otimes \pi_2^\vee$ est sous-représentation de $(\omega_{m_1,m_2})^\vee$, elle est également quotient. La représentation $(\omega_{m_1,m_2})^\vee \otimes \omega_{m_1,m_2'}$ admet alors $(\pi_1^\vee \otimes \pi_2^\vee) \otimes (\pi_1 \otimes \pi_2')$ comme quotient. Or, la représentation $(\omega_{m_1,m_2})^\vee \otimes \omega_{m_1,m_2'}$ s'identifie à la représentation de Weil de $\widetilde{\mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2)}$, où $W_2 = W_2^{m_2'} \oplus (-W_2^{m_2})$ est un espace hyperbolique.

De plus, le couple $(U(W_1), U(W_2^{m_2} + (-W_2^{m_2'})))$ est une paire duale dans $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes W_2)$. On obtient donc un morphisme $(U(W_1) \times R^\times)$-équivariant non trivial de $(\omega_{m_1,m_2})^\vee \otimes \omega_{m_1,m_2'}$ dans $\pi_1^\vee \otimes \pi_1$ où $U(W_1) \times R^\times$ est plongé diagonalement dans $H_1 H_1$, l'image de $H_1 \times H_1$ dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W_1 \otimes W_2)$ par les morphismes j_{m_2}, $j_{m_2'}$ et j de la Section 5.1.1. Comme $\pi_1^\vee \otimes \pi_1$ admet comme quotient la représentation triviale de $U(W_1)$, on en déduit que la restriction de $\Theta(1, W_2^{m_2'} + (-W_2^{m_2})) \in \mathrm{Rep}(H_2')$ au sous-groupe $H_2^{m_2} \times H_2^{m_2'}$, où $H_2' = \widetilde{U}(W_2^{m_2'} + (-W_2^{m_2}))_{W_1^0}$, admet comme quotient $\pi_2^\vee \otimes \pi_2'$.

D'après le Théorème 5.1.2.1, la représentation $\Theta(1, W_2^{m_2'} + (-W_2^{m_2}))$ est une sous-représentation d'une induite parabolique $I(s)$. On considère la restriction de ces deux représentations à $H_2^{m_2} \times H_2^{m_2'}$. L'injectivité de $\pi_2^\vee$ entraîne que le plus grand quotient $\pi_2^\vee$-isotypique de $\Theta(1, W_2^{m_2'} + (-W_2^{m_2}))$ s'injecte dans celui de $I(s)$; et l'existence d'un quotient cuspidal $\pi_2^\vee \otimes \pi_2'$ pour $\Theta(1, W_2^{m_2'} + (-W_2^{m_2}))$ entraîne que $(I(s))_{\pi_2^\vee} \neq 0$. En appliquant la première filtration à $I(s)$ avec $W_2^{m_2}$ et $W_2^{m_2'}$, on voit que la cuspidalité de $\pi_2^\vee \otimes \pi_2'$ entraîne que ceci n'est possible que si $m_2 = m_2'$. En effet, quand $m_2 \neq m_2'$, tous les sous-quotients qui apparaissent dans la filtration sont des induites paraboliques propres. La cuspidalité de $\pi_2^\vee$ entraîne que le plus grand quotient $\pi_2^\vee$-isotypique de J_0 se surjecte sur $(I(s))_{\pi_2^\vee}$. Par le Lemme 1.1.6.7, celui-ci ne peut être que $\pi_2^\vee \otimes \pi_2$ avec multiplicité 1. D'où $(I(s))_{\pi_2^\vee} = \pi_2^\vee \otimes \pi_2$, et par suite $\pi_2' = \pi_2$. De plus, on a dans ce cas $\dim\left(\mathrm{Hom}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}), \pi_2)\right) = 1$. On applique ce que l'on vient de montrer à $\pi_2' = \Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$, qui est bien cuspidale en vertu du premier point. On a donc $m_2 = m_2(\pi_1)$ et $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)}) = \pi_2$. □

Le point (ii) est encore valable en affaiblissant les hypothèses et en supposant seulement que π_2 et $\pi_2^\vee$ sont injectives. La discussion qui précède le théorème assure que π_2 est injective quand π_2 est projective. De plus, la contragrédiente d'une représentation projective est injective quand le foncteur $V \mapsto V^\vee$ est exact [Vig96, I.4.13], ce qui est bien le cas ici. La raison de ce choix est qu'il existe une caractérisation précise des représentations projectives, à savoir avec les hypothèses que nous avons ici, ce sont exactement les représentations qui sont compactes et ont un degré formel [Vig96, I.7.9].

Corollaire 5.2.2.3. *Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$. On suppose que π_1 est projective. Alors, si $m_2(ban) \geq m_2(\pi_1)$, la représentation cuspidale $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est irréductible, projective (et injective). Elle est par ailleurs l'unique quotient cuspidal de toute la tour de Witt $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$.*

Démonstration. C'est une application du théorème précédent. Pour ce faire, il s'agit de justifier que tout sous-quotient irréductible de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est projectif. Ce dernier point est vrai d'après l'hypothèse de banalité $m_2(\mathrm{ban}) \geq m_2(\pi_1)$. □

On peut donner une version plus forte de ce corollaire :

Corollaire 5.2.2.4. *On suppose que ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$. Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{cusp}(H_1)$. Alors, si $m_2(ban) \geq m_2(\pi_1)$, la représentation cuspidale $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est irréductible, projective (et injective). Elle est par ailleurs l'unique quotient cuspidal de toute la tour de Witt $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$.*

On déduit enfin de ce dernier corollaire et du Théorème 5.2.1.1 :

Corollaire 5.2.2.5. *On suppose que ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$ et que $m_2(ban) \geq n_1$. Alors pour toute $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$, la représentation cuspidale $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est irréductible, projective (et injective). Elle est par ailleurs l'unique quotient cuspidal de toute la tour de Witt $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$.*

Remarque 5.2.2.6. Ces deux corollaires ne signifient pas que la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ n'admet jamais de sous-quotient cuspidal si $m_2 > m_2(\pi_1)$. Seulement, pour tout sous-quotient irréductible cuspidal π_2 de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ avec $m_2 > m_2(\pi_1)$, on aura $m_2 > m_2(\mathrm{ban})$ et π_2 est cuspidale non injective. En particulier, elle n'est pas non plus projective. Une telle représentation cuspidale π_2 apparaît comme sous-quotient de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ mais pas comme quotient.

Paires commutatives et longueur finie. On se restreint, dans ce paragraphe seulement, aux paires duales commutatives de type I qui sont répertoriées dans le tableau de la Section 2.3. On se réfère à la Section 2.5 pour dire que ce sont les paires pour lesquelles l'involution MVW est définie.

Proposition 5.2.2.7. *On suppose que les paires considérées sont commutatives. Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$. Alors, si la représentation cuspidale $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est irréductible et injective, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est de longueur finie pour tout $m_2 \geq 0$.*

Démonstration. Si l'on prend un modèle de $\omega_{W_1,W_{2_1}}$ et de $\omega_{W_1,W_{2_2}}$ associé à un même caractère ψ, on a qu'un modèle de $\omega_{W_1,W_{2_1}+W_{2_2}}$ s'identifie à $\omega_{W_1,W_{2_1}} \otimes \omega_{W_1,W_{2_2}}$. De plus, en appliquant l'involution MVW, on a $\omega_{W_1,W_{2_2}}^{\mathrm{MVW}} = \omega_{W_1,-W_{2_2}}$. Ainsi, en prenant $W_{2_1} = W_2^{m_{2_1}}$ et $W_{2_2} = W_2^{m_{2_2}}$, comme l'involution MVW est exacte on obtient une surjection :

$$\omega_{W_1,W_{2_1}} \otimes \omega_{W_1,-W_{2_2}} \twoheadrightarrow \pi_1 \otimes \Theta(\pi_1, W_{2_1}) \otimes \pi_1^{\mathrm{MVW}} \otimes \Theta(\pi_1, W_{2_2})^{\mathrm{MVW}}.$$

Par suite, en prenant l'inclusion diagonale $H_1 \subset (\widetilde{H_1})_{W_{2_1}} \times (\widetilde{H_1})_{W_{2_2}}$ et en se rappelant que $\pi_1^{\mathrm{MVW}} \simeq \pi_1^\vee$, on obtient $\pi_1 \otimes \pi_1^{\mathrm{MVW}} \simeq \pi_1 \otimes \pi_1^\vee \twoheadrightarrow 1$ et donc :

$$\Theta(1, W_{2_1} + (-W_{2_2})) \twoheadrightarrow \Theta(\pi_1, W_{2_1}) \otimes \Theta(\pi_1, W_{2_2})^{\mathrm{MVW}}.$$

Si $\tau = \Theta(\pi_1, W_{2_1})$ est irréductible, cette surjection entraîne que le plus grand quotient τ-isotypique de $\Theta(1, W_{2_1} + (-W_{2_2}))$ se surjecte sur $\tau \otimes \Theta(\pi_1, W_{2_2})^{\mathrm{MVW}}$. On va montrer que quand $m_{2_1} = m_2(\pi_1)$, le plus grand quotient τ-isotypique de $\Theta(1, W_{2_1} + (-W_{2_2}))$ est de longueur finie, ce qui est suffisant pour conclure. Rappelons que $\Theta(1, W_{2_1} + (-W_{2_2}))$ est une sous-représentation d'une induite parabolique $I(s)$ pour un certain $s \in \mathbb{Z}$ d'après le Corollaire 5.1.2.2. On connaît de plus des filtrations explicites de telles induites d'après le Théorème 5.1.2.4. Par hypothèse, la représentation cuspidale $\tau = \Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ est irréductible et injective, la surjection précédente est donc un opérateur d'entrelacement de représentations de $\widetilde{H_{2_1}} \times \widetilde{H_{2_2}}$:

$$\Theta(1, W_{2_1} + (-W_{2_2})) \twoheadrightarrow \tau \otimes \Theta(\pi_1, W_{2_2})^{\mathrm{MVW}}.$$

On a de plus d'après la Proposition 1.1.6.11 que le plus grand quotient τ-isotypique de $\Theta(1, W_{2_1} + (-W_{2_2}))$ est inclus dans celui de $I(s)$, que l'on note $I(s)_\tau$. Au vu de la filtration du Théorème 5.1.2.4, du Lemme 1.1.6.7 et de la Proposition 1.1.6.14, ce dernier est isomorphe à la représentation :

$$I(s)_\tau = \tau \otimes \mathrm{ind}_{P_{\delta_m}^{m_{2_2}}}^{H_{2_2}}(\tau^\vee)$$

qui est bien de longueur finie. Donc $\Theta(1, W_{2_1} + (-W_{2_2}))_\tau$ est aussi de longueur finie comme sous-représentation de $I(s)_\tau$. D'où le résultat pour $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ en remarquant que l'involution MVW préserve la longueur d'une représentation. $\square$

Seuil d'irréductibilité. La Proposition 5.2.2.7 ne peut pas être réellement transposée pour les paires duales quaternioniques (cf. Section 2.3) puisqu'elle repose sur l'utilisation de l'involution MVW. On peut néanmoins citer un résultat qui paraît assez satisfaisant dans le cas banal, bien que l'on ne s'en serve pas dans la suite :

Proposition 5.2.2.8. *On suppose que ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$. Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$. On suppose que $m_2(ban) \geq m_2(\pi_1)$. Alors pour tout entier m_2 tel que $m_2(ban) \geq m_2 \geq m_2(\pi_1)$, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est irréducitble.*

Démonstration. On procède par récurrence. L'initialisation en $m_2 = m_2(\pi_1)$ provient du Corollaire 5.2.2.5. En effet, par hypothèse ℓ est banal vis-à-vis de $U(W_1)$ donc toute représentation irréductible cuspidale est projective et injective. On suppose donc que pour tout entier m_2 tel que $m_2(\pi_1) \leq m_2 \leq m_2^0 < m_2(\mathrm{ban})$, la représentation $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est irréductible. On va montrer que $\Theta(\pi_2, W_2^{m_2^0+1})$ est irréductible. D'après le Théorème 5.2.2.2, on a pour tous entiers naturels k et m_2 une égalité :

$$\nu_{k,-s+k} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2-k}) = R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})).$$

En particulier, l'hypothèse de récurrence implique que pour tout $m_2 \leq m_2^0 + 1$ et tout $k > 0$, la représentation $R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}))$ est soit nulle, soit irréductible. Ainsi, si $m_2(\pi_1) \leq m_2 \leq m_2^0 + 1$ et $0 < k \leq m_2 - m_2(\pi_1)$, on a égalité :

$$\nu_{k,-s+k} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2-k}) = R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})).$$

Maintenant, il existe un sous-quotient ρ de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2^0+1})$ tel que $R_{2_1}(\rho) = \nu_{1,-s+1} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2^0})$. Cela entraîne que pour tout $k > 0$, $R_{2_k}(\rho) = R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2^0+1})$. En effet, la restriction parabolique vis-à-vis du parabolique $P(\Phi)$, où Φ est le drapeau totalement isotrope $\{X_{2_1} \subset X_{2_k}\}$, est donnée par $R_{2_1} \circ R_{2_{k-1}} = R_{2_{k-1}} \circ R_{2_1}$. Or, $R_{2_{k-1}} \circ R_{2_1}(\rho) = \nu_{k-1,-(s-1)+(k-1)} \otimes \nu_{1,-s+1} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2^0}) \neq 0$. Donc $R_{2_k}(\rho) = R_{2_k}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2^0+1})$ pour tout k. De plus, les foncteurs de Jacquet R_{2_k} parcourt l'ensemble des paraboliques maximaux. Donc les foncteurs de Jacquet propres de tout autre sous-quotient irréductible de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2^0+1})$ sont tous nuls. C'est-à-dire tous ses autres sous-quotients irréductibles sont cuspidaux. Par hypothèse $m_2^0 + 1 \leq m_2(\text{ban})$. Donc s'il y avait un sous-quotient cuspidal irréductible, il apparaîtrait aussi comme quotient. Mais ceci est impossible en vertu du Corollaire 5.2.2.4. □

Remarque 5.2.2.9. En particulier, quand la caractéristique l est nulle *i.e.* $m_2(\text{ban}) = +\infty$, on retrouve l'énoncé classique sur l'irréductibilité pour les cuspidales.

Support cuspidal. On reprend les notations de la Section 5.1.1. On désigne par I_{2_j} l'induction parabolique dans $H_2^{m_2}$ depuis le parabolique $P_j^{m_2}$. On a une surjection de $G_j^{m_2} \times H_2^{m_2-j}$ vers son Levi $M_j^{m_2}$. Si $\rho \in \text{Rep}_R(G_j^{m_2})$ et $\sigma \in \text{Rep}_R(H_2^{m_2-j})$, l'induite à H_2 est $I_{2_j}(\rho \otimes \sigma)$. On pose $s = n_2 - n_1 + \eta_1$, où l'on rappelle que n_1 est la dimension de $W_1 = W_1^{m_1}$ sur D, n_2 celle de $W_2^{m_2}$ et $\eta_1 \in \{\varepsilon_1, 0, -\frac{\varepsilon_1}{2}\}$ selon que $D \in \{F, E, \text{quat.}\}$ (cf. Proposition 2.2.0.28).

Théorème 5.2.2.10. *Soit* $\pi_1 \in \text{Irr}_R^{\text{cusp}}(H_1)$.

(i) *Si* $\pi_1 \otimes \pi_2$ *est un quotient de* ω_{m_1,m_2} *avec :*

$$\pi_2 \hookrightarrow I_{2_j}(\rho_2 \otimes \sigma_2),\ \textit{où } \rho_2, \sigma_2 \textit{ sont irréductibles,}$$

alors :

$$\Theta(\pi_1, W_2^{m_2-j}) \twoheadrightarrow \sigma_2 \ \textit{et } \rho_2 = \nu_{j,-s+j}.$$

(ii) *On suppose qu'il existe un unique quotient irréductible cuspidal dans toute la tour, que l'on note* (m_2^0, π_2^0). *Alors, pour tout entier* $m_2 \geq m_2^0$, *on pose* $j = m_2 - m_2^0$. *Le support cuspidal d'un quotient irréductible de* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est :*

$$[\nu_{1,-s+1}, \nu_{1,-s+3}, \dots, \nu_{1,-s+2j-1}; \pi_2^0].$$

Si $m_2^0 > m_2$, $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *n'admet pas de quotient irréductible.*

Démonstration.

[(i)] On a alors une flèche non-triviale $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \to I_{2_j}(\rho_2 \otimes \sigma_2)$, qui fournit par adjonction une surjection $R_{2_j}(\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})) \twoheadrightarrow \rho_2 \otimes \sigma_2$. On en déduit le résultat recherché en appliquant le point précédent :

$$\nu_{j,-s+j} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2-j}) \twoheadrightarrow \rho_2 \otimes \sigma_2.$$

[(ii)] Ceci est une application facile de (i) en supposant σ_2 cuspidale. Donc $\sigma_2 = \pi_2^0$ et on conclut en calculant explicitement le support de $\nu_{j,-s+j}$ avec $j = m_2 - m_2^0$. □

Remarque 5.2.2.11. *A priori*, on sait seulement que l'on a $m_2^0 \geq m_2(\pi_1)$ dans le deuxième point.

Cette remarque donne lieu à plusieurs corollaires qui résultent des Corollaires 5.2.2.3 et 5.2.2.5 :

Corollaire 5.2.2.12. *Soit* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$*. Si la représentation cuspidale* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})$ *est irréductible et projective, alors on a dans le théorème précédent* $m_2^0 = m_2(\pi_1)$*. En reprenant les mêmes notations, pour tout* $m_2 \geq m_2(\pi_1)$*, le support cuspidal de tout quotient irréductible de* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est :*

$$[\nu_{1,-s+1}, \nu_{1,-s+3}, \dots, \nu_{1,-s+2j-1}; \Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})].$$

Corollaire 5.2.2.13. *Soit* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$*. On suppose que* ℓ *est banal vis-à-vis de* $U(W_1)$ *et que* $m_2(ban) \geq m_2(\pi_1)$*. Alors, pour tout* $m_2 \geq m_2(\pi_1)$*, le support cuspidal de tout quotient irréductible de* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est :*

$$[\nu_{1,-s+1}, \nu_{1,-s+3}, \dots, \nu_{1,-s+2j-1}; \Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})].$$

Corollaire 5.2.2.14. *On suppose que* ℓ *est banal vis-à-vis de* $U(W_1)$ *et que* $m_2(ban) \geq n_1$*. Alors, pour toute* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1)$ *et tout* $m_2 \geq m_2(\pi_1)$*, le support cuspidal de tout quotient irréductible de* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est :*

$$[\nu_{1,-s+1}, \nu_{1,-s+3}, \dots, \nu_{1,-s+2j-1}; \Theta(\pi_1, W_2^{m_2(\pi_1)})].$$

5.2.3 Le cas général π_1 irréductible.

Si π_1 n'est pas cuspidale, on exploite le cas cuspidal pour obtenir des énoncés sur la longueur finie et le support cuspidal. On note toujours I_{1_k} l'induction parabolique et R_{1_k} la restriction parabolique dans H_1 depuis le parabolique $P_j^{m_1}$. Son Levi est alors de la forme $G_j^{m_1} \times H_1^{m_1-j}$. Si $\rho \otimes \sigma$ est une représentation de ce Levi, l'induite est alors $I_{1_j}(\rho \otimes \sigma)$. On adopte les notations de la filtration du Théorème 5.1.3.1, où les sous-quotients sont dénotés J_t. Enfin, on reprend la définition de l'entier $m_2(\mathrm{ban})$ de le Section 5.2.2.

Longueur finie.

Proposition 5.2.3.1. *Soit* $k \geq 1$ *tel que* $R_{1_k}(\pi_1) \twoheadrightarrow \rho_1 \otimes \sigma_1$*, où* $\rho_1 \in \mathrm{Irr}_R(G_k^{m_1})$ *et* $\sigma_1 \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{cusp}}(H_1^{m_1-k})$*. Soit* m_2 *un entier. On suppose que pour tout* $m_2' \leq m_2$*, la représentation* $\Theta(\sigma_1, W_2^{m_2'})$ *est de longueur finie. Alors la représentation* $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ *est de longueur finie.*

Démonstration. La représentation $\pi_1 \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$ est un quotient de la représentation de Weil ω_{m_1,m_2}. Par suite, $R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2})$ se surjecte sur $R_{1_k}(\pi_1) \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$, donc a fortiori sur $\rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$. Il suffit donc de montrer que les $\rho_1 \otimes \sigma_1$-coinvariants de $R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2})$ sont de longueur finie. D'après la filtration du Théorème 5.1.3.1, il suffit de le prouver pour chaque sous-quotient J_t qui intervient. Le plus grand quotient $\rho_1 \otimes \sigma_1$-isotypique de :

$$J_t = \mathrm{ind}_{Q_{k-t}^k \times H_1^{m_1-j} \times P_t^{m_2}}^{G_k^{m_1} \times H_1^{m_1-k} \times H_2^{m_2}} \big(\xi_t \otimes C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X'_{1_t}, X_{2_t})) \otimes \omega_{m_1-k, m_2-t}\big)$$

est :

$$\mathrm{ind}_{P_t^{m_2}}^{H_2^{m_2}} \left(\sigma_1 \otimes \Theta(\sigma_1, W_2^{m_2-t}) \otimes \left(\mathrm{ind}_{Q_{k-t}^k}^{G_k^{m_1}} (\xi_t \otimes C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X'_{1_t}, X_{2_t}))) \right)_{\rho_1} \right).$$

On procède comme dans le point (b) du [MVW87, Chap. 3, Cor. III.2] sur la finitude des ρ_1-coinvariants, pour en déduire que les $\rho_1 \otimes \sigma_1$-coinvariants de $R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2})$ sont de longueur finie. $\square$

Support cuspidal.

Proposition 5.2.3.2. *Soit $\pi_1 \otimes \pi_2$ un quotient irréductible de ω_{m_1,m_2}. Soit $k \geq 1$ tel qu'on ait un quotient irréductible $\rho_1 \otimes \sigma_1$ de $R_{1_k}(\pi_1)$ avec ρ_1 cuspidale. On distingue les deux cas suivants.*

1. *Soit $k = 1$ et $\mathrm{Hom}(J_0, \rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \pi_2) \neq 0$. Auquel cas $\sigma_1 \otimes \pi_2$ est quotient de ω_{m_1-1,m_2} c'est-à-dire :*
$$\rho_1 = \nu_{1,s+1} \text{ et } \Theta(\sigma_1, W_2^{m_2}) \twoheadrightarrow \pi_2.$$
2. *Soit $\mathrm{Hom}(J_0, \rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \pi_2) = 0$, et dans ce cas on a $m_2 \geq k$. Il existe alors un quotient irréductible $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ de ω_{m_1-k,m_2-k}, i.e. $\Theta(\sigma_1, W_2^{m_2-k}) \twoheadrightarrow \sigma_2$, tel que :*
$$\pi_2 \text{ soit un sous-quotient de } I_{2_k}(\rho_1^\vee \otimes \sigma_2).$$
Et si $m_2 \leq m_2(ban)$, on a :
$$[\pi_2] = [\rho_1^\vee, [\sigma_2]].$$

Démonstration. Si un entrelacement non-trivial $\omega_{m_1,m_2} \to \pi_1 \otimes \pi_2$ existe, alors il existe un entrelacement non-trivial $R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2}) \to \rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \pi_2$. Il existe alors un entier t tel que $\mathrm{Hom}(J_t, \rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \pi_2) \neq 0$. Comme ρ_1 est cuspidale, on ne peut avoir comme contribution que $t = k$, ou bien, $k = 1$ et $t = 0$.
[Cas 1] On a $J_0 = \nu_{1,s+1} \otimes \omega_{m_1-1,m_2}$ et donc cela entraîne que $\rho_1 = \nu_{1,s+1}$ et la représentation $\sigma_1 \otimes \pi_2$ est un quotient de ω_{m_1-1,m_2}.
[Cas 2] De la suite exacte $0 \to J_k \to R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2}) \to R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2})/J_k \to 0$ et de l'exactitude à droite des $\rho_1 \otimes \sigma_1$-coinvariants, on tire que $(J_k)_{\rho_1\otimes\sigma_1} \twoheadrightarrow (R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2}))_{\rho_1\otimes\sigma_1}$. En résumé on a :
$$(J_k)_{\rho_1\otimes\sigma_1} \twoheadrightarrow (R_{1_k}(\omega_{m_1,m_2}))_{\rho_1\otimes\sigma_1} \twoheadrightarrow (R_{1_k}(\pi_1))_{\rho_1\otimes\sigma_1} \otimes \Theta(\pi_1, W_2^{m_2}) \twoheadrightarrow \rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \pi_2.$$
Le calcul des $\rho_1 \otimes \sigma_1$-coinvariants de J_k donne :
$$(J_k)_{\rho_1\otimes\sigma_1} = \rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \mathrm{Ind}_{P_k^{m_2}}^{H_2^{m_2}}(\rho_1^\vee \otimes \Theta(\sigma_1, W_2^{m_2-k})).$$
Comme π_2 est admissible, la seconde adjonction donne un morphisme non-trivial :
$$\rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes \rho_1^\vee \otimes \Theta(\sigma_1, W_2^{m_2-k}) \to \rho_1 \otimes \sigma_1 \otimes R_{2_k}^{\mathrm{op}}(\pi_2),$$
où $R_{2_k}^{\mathrm{op}}$ désigne le foncteur de Jacquet vis-à-vis du parabolique opposé de $P_k^{m_2}$. Il existe alors un sous-quotient irréductible $\rho_2 \otimes \sigma_2$ de $R_{2_k}^{\mathrm{op}}(\pi_2)$ tel que $\rho_2 = \rho_1^\vee$ et σ_2 soit un quotient de $\Theta(\sigma_1, W_2^{m_2-k})$. Enfin, si $m_2 \leq m_2(\mathrm{ban})$, les représentations cuspidales sont supercuspidales et le support cuspidal de π_2 est alors $[\rho_1^\vee, [\sigma_2]]$. □

En appliquant récursivement la proposition précédente, on déduit :

Corollaire 5.2.3.3. *Soit $\pi_1 \otimes \pi_2$ un quotient irréductible de ω_{m_1,m_2}. On suppose que $m_2 \leq m_2(ban)$.*
On note $[\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \rho_1]$ le support cuspidal de π_1 et $\alpha = (i_1, \ldots, i_r)$ le multi-indice associé à $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, de somme $|\alpha|$. Alors il existe un multi-indice $\beta = (i_{j_1}, \ldots, i_{j_t})$ issu de α ainsi qu'un quotient irréductible ρ_2 de $\Theta(\rho_1, W_2^{m_2-|\beta|})$ tels que :
$$[\pi_2] = [\sigma_{j_1}^\vee, \ldots, \sigma_{j_t}^\vee; [\rho_2]].$$

On est donc ramené au calcul du support dans le cas cuspidal. Une condition suffisante est qu'il existe un unique quotient irrédutible cuspidal dans la tour $(\Theta(\rho_1, W_2^{m_2}))_{m_2}$. Si de plus cusp $\Rightarrow$ proj, on sait que ce quotient cuspidal est $\Theta(\rho_1, W_2^{m_2(\rho_1)})$. Cela donne lieu à :

Corollaire 5.2.3.4. *Soit $\pi_1 \otimes \pi_2$ un quotient irréductible de ω_{m_1,m_2}. On suppose que l est banal vis-à-vis de $U(W_1)$ et que $m_2(\rho_1) \leq m_2(ban)$. On note $[\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \rho_1]$ le support cuspidal de π_1 et $\alpha = (i_1, \ldots, i_r)$ le multi-indice associé à $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, de somme $|\alpha|$.*

— *si $m_2 \geq |\alpha| + m_2(\rho_1)$, on pose $t = m_2 - |\alpha| - m_2(\rho_1)$. On a alors :*

$$[\pi_2] = [\sigma_1^\vee, \ldots, \sigma_r^\vee, \nu_{1,-s+1}, \ldots, \nu_{1,-s+(2t-1)}; \Theta(\rho_1, W_2^{m_2(\rho_1)})].$$

— *si $m_2 < |\alpha| + m_2(\rho_1)$, il existe un multi-indice $\gamma = (i_{j_1}, \ldots, i_{j_t}) = (1, \ldots, 1)$ issu de α de somme/cardinal $m_2(\rho_1) + |\alpha| - m_2$ tel que $\sigma_{j_1} = \nu_{1,s+1}, \ldots, \sigma_{j_t} = \nu_{1,s+(2t+1)}$ et son complémentaire $\delta = (i_{j'_1}, \ldots, i_{j'_{r-t}})$ de somme $m_2 - m(\rho_1)$ donne :*

$$[\pi_2] = [\sigma_{j'_1}^\vee, \ldots, \sigma_{j'_{r-t}}^\vee; \Theta(\rho_1, W_2^{m_2(\rho_1)})].$$

Démonstration. D'après le corollaire précédent et le calcul du support des quotients irréductibles de $\Theta(\rho_1, W_2^{m_2-|\beta|})$ (en effet, le support cuspidal $[\pi_2]$ de π_2 est donné par $[\sigma_\beta^\vee, \nu_{1,-s'-2j+1}, \ldots, \nu_{1,-s'-1}; \Theta(\rho_1, W_2^{m_2(\rho_1)})]$, où $j = m_2 - |\beta| - m_2(\rho_1)$ et $s' = n_2(\rho_1) - (n_1 - 2|\alpha|) + \eta_1 = s - 2t$ avec $t = m_2 - |\alpha| - m_2(\rho_1)$ et $n_2(\rho_1)$ la dimension de $W_2^{m_2(\rho_1)}$. Donc $-s' = -s + 2t$ et $j - t = |\alpha| - |\beta|$. Ainsi, les indices varient de $-s - 2(j-t) + 1$ à $-s + 2t - 1$ où $j \geq t$. Si $t \geq 0$, les indices de $-s - 2(j-t) + 1$ à $-s - 1$ correspondent exactement à des contragrédientes de caractères qui proviennent du cas 1. En effet, la première fois que le cas 1 se produit, ce sera pour le caractère $\nu_{1,s+1}$ dont la contragrédiente est $\nu_{1,-s-1}$. Quant au cas suivant, il correspond au cas où un des σ est le caractère $\nu_{1,s+3}$, de contragrédiente $\nu_{1,-s-3}$. On peut donc compléter le multi-indice β en α. Restent alors tous les termes $\nu_{1,-s+1}$ à $\nu_{1,-s+2t-1}$. Si $t < 0$, on utilise des arguments similaires. □

Corollaire 5.2.3.5. *On suppose que l est banal vis-à-vis de $U(W_1)$ et que $m_2(ban) \geq n_1$. Soit $\pi_1 \otimes \pi_2$ un quotient irréductible de ω_{m_1,m_2}, avec $m_2 \leq m_2(ban)$. On note $[\sigma_1, \ldots, \sigma_r; \rho_1]$ le support cuspidal de π_1 et $\alpha = (i_1, \ldots, i_r)$ le multi-indice associé à $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, de somme $|\alpha|$.*

— *si $m_2 \geq |\alpha| + m_2(\rho_1)$, on pose $t = m_2 - |\alpha| - m_2(\rho_1)$. On a alors :*

$$[\pi_2] = [\sigma_1^\vee, \ldots, \sigma_r^\vee, \nu_{1,-s+1}, \ldots, \nu_{1,-s+(2t-1)}; \Theta(\rho_1, W_2^{m_2(\rho_1)})].$$

— *si $m_2 < |\alpha| + m_2(\rho_1)$, il existe un multi-indice $\gamma = (i_{j_1}, \ldots, i_{j_t}) = (1, \ldots, 1)$ issu de α de somme/cardinal $m_2(\rho_1) + |\alpha| - m_2$ tel que $\sigma_{j_1} = \nu_{1,s+1}, \ldots, \sigma_{j_t} = \nu_{1,s+(2t+1)}$ et son complémentaire $\delta = (i_{j'_1}, \ldots, i_{j'_{r-t}})$ de somme $m_2 - m(\rho_1)$ donne :*

$$[\pi_2] = [\sigma_{j'_1}^\vee, \ldots, \sigma_{j'_{r-t}}^\vee; \Theta(\rho_1, W_2^{m_2(\rho_1)})].$$

Chapitre 6

Preuve de la correspondance

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2 et de caractéristique résiduelle p. On se restreint ici aux paires duales de type I pour lesquelles D est commutatif. Comme indiqué dans le tableau de la Section 2.3, ce sont les paires duales pour lesquelles on a $D = E$. On les appelle paires duales de type I commutatives. On reprend les notations de la Section 2.6 pour les groupes classiques. On note ensuite $q = q_E$ le cardinal résiduel du corps E. On a donc $q = (q_F)^f$ où f est le degré résiduel de l'extension E/F. Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique ℓ différente de p et 2. On fixe une racine carré de q dans R, notée $q^{\frac{1}{2}}$.

Dans toute cette section, W_1 désignera un espace ε_1-hermitien sur E dont on note n_1 la dimension et n_2 l'indice de Witt m_1. La notation W_1^k désignera un espace dans la même série de Witt que W_1 et d'indice de Witt k. Bien évidemment $W_1^{m_1} = W_1$. On emploiera des notations similaires pour W_2 un espace ε_2-hermitien. On suppose dorénavant que $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, de sorte que $(U(W_1), U(W_2))$ est une paire duale dans $\mathrm{Sp}(W_1 \otimes_E W_2)$. On pose :

$$\eta_1 = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{si } E = F \text{ ;} \\ 0 & \text{si } E/F \text{ est quadratique.} \end{cases}$$

Quitte à échanger W_1 et W_2, on suppose que $n_2 \leq n_1 - \eta_1$. On reprend les conventions et les notations de la Section 5.1.1 pour la représentation de Weil dans les tours de Witt ω_{m_1,m_2}, en fixant des drapeaux totalement isotropes X_{1_k} et X_{2_k} de chacun de ces espaces, ainsi que des drapeaux duaux. Cela fixe ainsi des choix de paraboliques standards et de Levi standards. En particulier, les groupes H_1 et H_2 sont des groupes isomorphes aux relevés de $U(W_1)$ et $U(W_2)$ dans $\widetilde{Sp}(W_1 \otimes W_2)$.

La preuve que l'on présente ici est une généralisation des arguments de [GT16]. On n'obtient une preuve complète de la correspondance pour une paire commutative de type I $(U(W_1), U(W_2))$ fixée (cf. Théorème 6.3.3.3) qu'à condition d'avoir $o_R(q) > n_1 + 2m_1$, où $o_R(q)$ désigne l'ordre de q dans $R^\times$ et en supposant l'existence d'une certaine surjection (cf. hypothèse (H) de la Section 6.2). Il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers ℓ pour lesquelles la condition sur $o_R(q)$ n'est pas vérifiée. Si elle ne l'est pas, on a toutefois des résultats partiels relativement explicites et proches des énoncés de la correspondance en distinguant deux groupes de représentations : celles hors du bord pour lesquelles tout se passe comme dans le cas le plus favorable en supposant (H) (cf. Théorème 6.2.0.10) ; et les représentations du bord qui sont, elles, sensibles à la caractéristique ℓ de R (cf. Théorème 6.3.3.1 et Lemme 6.3.3.1). On discute dans la Section 7 de stratégies qui pourraient permettre de montrer que, excepté pour un nombre fini de premiers ℓ, l'hypothèse (H) est vérifiée.

6.1 Définition du bord de $I(s)$

Soit $s \in \mathbb{Z}$. Soit $I(s)$ la représentation du Lemme 5.1.2.5, dont on reprend la notation $R_t(s)$ pour les sous-quotients qui interviennent dans la filtration. On voit $I(s)$ comme une représentation du groupe H_1 en considérant seulement l'action sur le premier facteur – voir Lemme 5.1.2.5.

Définition 6.1.0.6. On dit que $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$ apparaît dans le bord de $I(s)$ s'il existe $0 < t \leq m_1$ tel que :

$$\mathrm{Hom}_{H_1}(R_t(s), \pi_1) \neq 0.$$

Proposition 6.1.0.7. *Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$. Les conditions suivantes sont équivalents :*

1. *π_1 apparaît dans le bord de $I(s)$;*
2. *il existe $0 < t \leq m_1$ tel que $\mathrm{Hom}_{G_t^{m_1}}(\nu_{tX,s+t}, R_{1_t}^{op}(\pi_1))) \neq 0$;*
3. *il existe $0 < t \leq m_1$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-t})$ tels que $\mathrm{Hom}_{H_1}(\pi_1, \nu_{tX,-s-t} \rtimes \sigma) \neq 0$.*

Démonstration. En effet, d'après le Lemme 5.1.2.5, on a pour tout $0 < t \leq m_1$:

$$R_t(s) = \mathrm{ind}_{P_t^{m_1} \times P_t^{m_1}}^{H_1 \times H_1} \Big((\nu_{tX,s+t} \boxtimes \nu_{tX,s+t}) \otimes C_c^\infty(U({}_tW_1)) \Big).$$

On suppose que π_1 dans le bord de $I(s)$. Comme π_1 est admissible, la seconde adjonction et la dualité de Casselman sont valables d'après la Proposition 1.2.1.2. La seconde adjonction donne l'équivalence avec l'existence d'un morphisme non-nul de $\nu_{tX,s+t} \otimes \nu_{tX,s+t} \otimes C_c^\infty(U({}_tW_0))$ dans $R_{1_t}^{\mathrm{op}}(\pi_1)$. Le Lemme 1.1.6.7 sur la représentation régulière conduit à l'équivalence avec la deuxième condition de la proposition. Pour finir, on a par dualité :

$$\mathrm{Hom}_{G_t^{m_1}}(R_{1_t}^{\mathrm{op}}(\pi_1)^\vee, \nu_{tX,-s-t}) \neq 0.$$

La dualité de Casselman assure qu'on a alors :

$$\mathrm{Hom}_{G_t^{m_1}}(R_{1_t}(\pi_1^\vee), \nu_{tX,-s-t}) \neq 0.$$

Par réciprocité de Frobenius, il existe une représentation irréductible τ telle que le morphisme :

$$\pi_1^\vee \to \nu_{tX,-s-t} \rtimes \tau$$

soit non-trivial. Il suffit enfin d'appliquer l'involution MVW et d'utiliser la compatibilité à $\rtimes$ décrites dans la Section 2.6 pour déduire l'équivalence avec la dernière condition. □

Remarque 6.1.0.8. Si π_1 n'apparaît pas dans le bord de $I(s)$, alors $\pi_1^\vee$ non plus. En effet, la dernière condition se reformule $\mathrm{Hom}_{G_t^{m_1}}(R_{1_t}(\pi_1), \nu_{tX,-s-t}) \neq 0$. En dualisant et en appliquant la dualité de Casselman $R_{1_t}(\pi_1)^\vee = R_{1_t}^{\mathrm{op}}(\pi_1^\vee)$, car π_1 est admissible, on obtient $\mathrm{Hom}_{G_t^{m_1}}(\nu_{tX,s+t}, R_{1_t}^{\mathrm{op}}(\pi_1^\vee)) \neq 0$.

Remarque 6.1.0.9. Une représentation cuspidale n'apparaît jamais dans le bord de $I(s)$ car les sous-quotients $R_t(s)$ pour $0 < t \leq m_1$ sont des induites paraboliques strictes. En un certain sens, ne pas apparaître dans le bord est une généralisation des « bonnes » propriétés des cuspidales pour la filtration de $I(s)$, à savoir qu'elles ne peuvent apparaître que pour $R_0(s)$.

6.2 Représentations qui n'interviennent pas dans le bord

On pose $s = n_2 - n_1 + \eta_1$. On rappelle que, par hypothèse, on a $s \leq 0$. On montre que la correspondance de Howe est vraie pour toute représentation π_1 qui n'est pas dans le bord de $I(-s)$ en faisant l'hypothèse suivante :

(H) Il existe une surjection $I(-s) \twoheadrightarrow \Theta(1, W_1 + (-W_1))$ dans $\mathrm{Rep}_R(H_1 \times H_1)$.

Théorème 6.2.0.10. *Sous l'hypothèse* (H)*, si π_1 n'intervient pas dans le bord de $I(-s)$, alors :*
- *soit $\Theta(\pi_1, W_2)$ n'admet pas de quotient irréductible ;*
- *soit $\Theta(\pi_1, W_2)$ possède un unique quotient irréductible $\theta(\pi_1, W_2)$. Auquel cas :*

$$\pi_1 \simeq \pi_1' \Leftrightarrow \theta(\pi_1, W_2) \simeq \theta(\pi_1', W_2).$$

Démonstration. Supposons que $\Theta(\pi_1, W_2)$ admette un quotient irréductible. Soit S_{π_1} un quotient semi-simple de $\Theta(\pi_1, W_2)$. Soit π_1' une représentation irréductible quelconque de H_1 et $S_{\pi_1'}$ un quotient semi-simple ou nul de $\Theta(\pi_1', W_2)$. Nous allons prouver que :

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{H_2}(S_{\pi_1}, S_{\pi_1'})\right) \leq \delta_{\pi_1, \pi_1'}$$

où $\delta_{\pi_1, \pi_1'}$ vaut 1 si $\pi_1 \simeq \pi_1'$ et 0 sinon. Cela suffit puisque cette inégalité vaut pour tout quotient semi-simple de $\Theta(\pi_1, W_2)$ et tout quotient semi-simple ou nul de $\Theta(\pi_1', W_2)$. On considère la paire duale balançoire (cf. Section 4.5.4) :

$$\begin{tikzcd}
U(W_1 \oplus (-W_1)) \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & U(W_2) \times U(W_2) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
U(W_1) \times U(W_1) & U(W_2)
\end{tikzcd}$$

où $U(W_2)$ est plongé diagonalement dans le produit $U(W_2) \times U(W_2)$. On applique l'identité seesaw de la Proposition 4.5.4.1. Cela donne :

$$\mathrm{Hom}_{H_1 \times H_1}(\Theta(1, W_1 \oplus (-W_1)), \pi_1' \otimes \pi_1^\vee) = \mathrm{Hom}_{H_2}(\Theta(\pi_1', W_2) \otimes \Theta(\pi_1, W_2)^{\mathrm{MVW}}, 1).$$

Chaque terme de cette égalité est analysé séparément.

Pour le membre de gauche d'une part, l'hypothèse fournit une surjection de $H_1 \times H_1$-représentations de $I(-s)$ vers $\Theta(1, W_1 \oplus (-W_1))$. On a donc :

$$\mathrm{Hom}_{H_1 \times H_1}(I(-s), \pi_1' \otimes \pi_1^\vee) \supset \mathrm{Hom}_{H_2}(\Theta(\pi_1', W_2) \otimes \Theta(\pi_1, W_2)^{\mathrm{MVW}}, 1).$$

En ce qui concerne le membre de droite d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{H_2}(\Theta(\pi_1', W_2) \otimes \Theta(\pi_1, W_2)^{\mathrm{MVW}}, 1) &\supset \mathrm{Hom}_{H_2}(S_{\pi_1'} \otimes S_{\pi_1}^{\mathrm{MVW}}, 1) \\
&= \mathrm{Hom}_{H_2}(S_{\pi_1'}, S_{\pi_1})
\end{aligned}$$

En effet, on a par définition des morphismes $\Theta(\pi_1', W_2) \twoheadrightarrow S_{\pi_1'}$ et $\Theta(\pi_1, W_2) \twoheadrightarrow S_{\pi_1}$ de représentations de H_2, et l'exactitude de l'involution MVW donne un opérateur d'entrelacement $\Theta(\pi_1, W_2)^{\mathrm{MVW}} \twoheadrightarrow S_{\pi_1}^{\mathrm{MVW}}$. De plus, $S_{\pi_1'}$ est semi-simple ou nulle par définition, en appliquant l'involution MVW on obtient $S_{\pi_1'}^{\mathrm{MVW}} \simeq S_{\pi_1'}^\vee$.

On obtient finalement une inclusion :

$$\mathrm{Hom}_{H_1\times H_1}(I(-s),\pi_1'\otimes\pi_1^\vee)\supset \mathrm{Hom}_{H_2}(S_{\pi_1'},S_{\pi_1}).$$

On va montrer que la dimension du membre de gauche vérifie l'inégalité préconisée, à savoir, il est de dimension 1 si et seulement si $\pi_1\simeq\pi_1'$. Pour ce faire, il suffit de remarquer que la flèche donnée par la restriction à $R_0(-s)$ dans la filtration du Lemme 5.1.2.5 :

$$\mathrm{Hom}_{H_1\times H_1}(I(-s),\pi_1'\otimes\pi_1^\vee)\to \mathrm{Hom}_{H_2}(R_0(-s),\pi_1'\otimes\pi_1^\vee)$$

est injective, et que le membre de droite est de dimension 1 si et seulement si $\pi_1'\simeq\pi_1$. Concernant l'énoncé sur la dimension, on a $R_0(-s)\simeq C_c^\infty(U(W_2))$ ne dépend pas de s et il suffit d'utiliser le Lemme 1.1.6.7 sur les π_1-coinvariants de la représentation régulière. Ensuite, concernant l'injection, il s'agit de prouver que pour tout $0<t\leq m_1$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{H_2}(R_t(-s),\pi_1'\otimes\pi_1^\vee)=0.$$

On va montrer que ceci est vrai car π_1 n'est pas dans le bord de $I(-s)$. Pour rappel, on a :

$$R_t(-s)=\mathrm{ind}_{P_t^{m_1}\times P_t^{m_1}}^{H_1\times H_1}\Big((\nu_{tX,-s+t}\boxtimes\nu_{tX,-s+t})\otimes C_c^\infty(U(_tW_0))\Big).$$

La seconde adjonction, valide dans ce contexte puisque π_1 et π_1' sont admissibles, permet d'identifier l'espace $\mathrm{Hom}_{H_2}(R_t(-s),\pi_1'\otimes\pi_1^\vee)$ avec :

$$\mathrm{Hom}_{M_t^{m_1}\times M_t^{m_1}}\Big((\nu_{tX,-s+t}\boxtimes\nu_{tX,-s+t})\otimes C_c^\infty(U(_tW_0)),R_{1_t}^{\mathrm{op}}(\pi_1')\otimes R_{1_t}^{\mathrm{op}}(\pi_1^\vee)\Big).$$

Comme π_1 n'intervient pas dans le bord, on a $\mathrm{Hom}_{G_t^{m_1}}(\nu_{tX,-s+t},R_{1_k}^{\mathrm{op}}(\pi_1^\vee))=0$. Cela entraîne la nullité de l'espace précédent et donc $\mathrm{Hom}_{H_2}(R_t(-s),\pi_1'\otimes\pi_1^\vee)=0$. □

Proposition 6.2.0.11. *Soient π_1 et π_1' dans $\mathrm{Irr}_R(H_1)$. On suppose que $\Theta(\pi_1,W_2)$ et $\Theta(\pi_1',W_2)$ ont des quotients irréductibles et en admettent un en commun. Il existe alors $0<t\leq m_1$ et des représentations σ_1 et σ_1' dans $\mathrm{Irr}_R(H_2^{m_2-t})$ tels que :*

$$\pi_1\to\nu_{tX,-s-t}\rtimes\sigma_1 \quad et \quad \pi_1'\to\nu_{tX,-s-t}\rtimes\sigma_1'.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe deux quotients semi-simples (donc non nulles) S_{π_1} et $S_{\pi_1'}$ de $\Theta(\pi_1,W_2)$ et $\Theta(\pi_1,W_2)$ qui partagent au moins un facteur irréductible. Comme $\mathrm{Hom}_{H_2}(S_{\pi_1},S_{\pi_1'})=\mathrm{Hom}_{H_2}(S_{\pi_1}\otimes S_{\pi_1'}^\vee,1)$, on déduit de la preuve précédente qu'il existe un entier $t>0$ tel que $\mathrm{Hom}_{H_2}(R_t(-s),\pi_1'\otimes\pi_1^\vee)\neq0$. Cela signifie que $\mathrm{Hom}_{G_t^{m_1}}(\nu_{tX,-s+t},R_{1_k}^{\mathrm{op}}(\pi_1^\vee))\neq0$, donc π_1 intervient dans le bord de $I(-s)$. On procède de même pour π_1'. □

Remarque 6.2.0.12. Cette dernière proposition signifie simplement que si la correspondance devait être violée pour des représentations π_1 et π_1' non isomorphes, alors ces deux représentations interviendraient dans le bord pour un même indice t. Bien évidemment, quand la correspondance est vraie, la condition $\mathrm{Hom}_{H_2}(\theta(\pi_1,W_2),\theta(\pi_1',W_2))\neq0$ n'a jamais lieu si $\pi_1\neq\pi_1'$.

6.3 Représentations du bord

Les représentations du bord sont plus difficiles à traiter. On va supposer que π_1 est dans le bord de $I(-s)$, où $s = n_2 - n_1 + \eta_1$. L'idée derrière cette preuve a d'abord été introduite dans le cas des paires duales de type II [Mín08], et a ensuite été étendue à toute paire duale de type 1 commutative dans le cas complexe [GT16].

6.3.1 Lemme sur les induites paraboliques

On aura besoin d'utiliser un cas particulier du lemme suivant par la suite. On le donne avec la plus grande des généralités comme dans [GT16, 5.2]. On reprend les notations de la Section 2.6.

Lemme 6.3.1.1. *Soient $\rho \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{scusp}}(G_r^{m_1})$ et $\sigma \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-ra})$. On pose $\sigma_{\rho,a} = \rho^{\times a} \rtimes \sigma \in \mathrm{Rep}_R(H_1)$. On suppose que $q^r \neq 1 \mod \ell$, que la représentation ρ est injective modulo le centre et que :*
(a) ${}^c\rho^\vee \neq \rho$;
(b) $\sigma \nsubseteq \rho \rtimes \sigma_0$ pour tout σ_0.
Alors la partie $\rho^{\times a}$-isotypique de la semi-simplifiée de $R_{1_{ra}}(\sigma_{\rho,a})$ est $\rho^{\times a} \otimes \sigma$. En particulier, la représentation $\sigma_{\rho,a}$ admet une unique sous-représentation irréductible.

Démonstration. D'après [MS14, Th. B], l'hypothèse $q^r \neq 1 \mod l$ entraîne que $\rho^{\times a}$ est irréductible. On cherche maintenant à appliquer le Lemme 1.2.1.3. Pour ce faire, il suffit de prouver que la représentation $\rho^{\times a} \otimes \sigma$ apparaît avec multiplicité 1 dans la semi-simplifiée de $R_{1_{ra}}(\sigma_{\rho,a})$. Bien évidemment, si la partie $\rho^{\times a}$-isotypique de la semi-simplifiée de $R_{1_{ra}}(\sigma_{\rho,a})$ est $\rho^{\times a} \otimes \sigma$, alors la condition de multiplicité 1 est vérifiée.

On utilise l'interprétation de [Tad95] du lemme géométrique. On la rappelle dans la Section 2.6. Comme ρ est cuspidale, on sait que pour tout sous-quotient irréductible $\delta \otimes \sigma'$ de $R_{1_{ra}}(\sigma_{\rho,a})$, il existe trois entiers naturels k_1, k_2, k_3, vérifiant $k_1 + k_2 + k_3 = a$, et un sous-quotient irréductible $\delta_2 \otimes \sigma_2$ du foncteur de Jacquet de σ vis-à-vis de $G_{rk_2}^{m_1-ra} \times H_1^{m_1-ra-rk_2}$, tels que δ soit un sous-quotient de $\rho^{\times k_3} \times ({}^c\rho^{\times k_1})^\vee \times \delta_2$. La condition (a) entraîne que $({}^c\rho^{\times k_1})^\vee \simeq \rho^{\times k_1}$ seulement si $k_1 = 0$. La condition (b) et l'hypothèse d'injectivité implique que $\delta_2 \simeq \rho^{\times k_2}$ seulement si $k_2 = 0$. D'après la Proposition 1.2.2.2, il y a unicité du support supercuspidal dans GL_n, donc cela entraîne que le support supercuspidal de δ est $\rho^{\otimes a}$ si et seulement si $k_1 = k_2 = 0$. Ceci correspond aux sous-quotients irréductibles qui interviennent dans la cellule fermée, c'est-à-dire ceux du lemme géométrique qui proviennent de la restriction à l'orbite fermée $P(X_{1_{ra}})$. Or la projection sur la fibre en $P(X_{1_{ra}})$ est précisément $R_{1_{ra}}(\sigma_{\rho,a}) \to \rho^{\times a} \otimes \sigma$. Cela prouve que $\rho^{\times a} \otimes \sigma$ est de multiplicité 1 dans la semi-simplifiée de $R_{1_{ra}}(\sigma_{\rho,a})$. □

Corollaire 6.3.1.2. *On reprend les notations et hypothèses du lemme précédent. Soit π l'unique sous-représentation irréductible de $\sigma_{\rho,a}$. Soient $b \geq a$ et $\delta \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-rb})$ tels que π soit une sous-représentation de $\delta_{\rho,b} = \rho^{\times b} \rtimes \delta$. Alors $b = a$ et $\delta \simeq \sigma$.*

Démonstration. On a $\pi \hookrightarrow \rho^{\times b} \rtimes \delta$, et par réciprocité de Frobenius, on obtient un morphisme non-trivial $R_{1_{ra}}(\pi) \to \rho^{\times a} \otimes \rho^{\times(b-a)} \rtimes \delta$. Or, d'après la preuve du lemme précédent, celui-ci se factorise par $\rho^{\times a} \otimes \sigma$. Et donc $\sigma \subset \rho^{\times(b-a)} \rtimes \delta$. Étant donné l'hypothèse (b) qui portait sur σ, ceci n'est possible qu'à condition d'avoir $b = a$ et $\delta \simeq \sigma$. □

Définition 6.3.1.3. Soient $\pi \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$ et $\rho \in \mathrm{Irr}_R^{\mathrm{scusp}}(G_r^{m_1})$. On suppose qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Rep}_R(H_1^{m_1-r})$ telle que $\pi \subset \rho \rtimes \sigma$. On définit le plus grand entier associé à π et ρ par :

$$a_\pi(\rho) = \max\{a \in \mathbb{N} \mid \exists\ \sigma' \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-ra}) \text{ tel que } \pi \subset \rho^{\times a} \rtimes \sigma'\}.$$

Remarque 6.3.1.4. En reprenant les hypothèses et notations du Lemme 6.3.1.1, on a l'égalité $a = a_\pi(\rho)$, où π est l'unique sous-représentation irréductible de $\sigma_{\rho,a}$.

6.3.2 Un calcul explicite clé

On pose $s = n_2 - n_1 + \eta_1$. D'après la Section 6.1, si π_1 intervient dans le bord de $I(-s)$, alors il existe $t > 0$ et $\sigma_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-t})$ tels que :

$$\pi_1 \hookrightarrow \nu_{tX,s-t} \rtimes \sigma_1.$$

De plus, le calcul du support cuspidal de la représentation triviale des segments donne l'inclusion :

$$\nu_{tX,s-t} \hookrightarrow \nu_{1,s-2t+1} \times \nu_{1,s-2(t-1)+1} \cdots \times \nu_{1,s-1}$$

où $\nu_{1,k}$ est un caractère de $G_1^{m_1}$ tel que $\nu_{1,k} = \nu_{1,0}|\det_F|^{\frac{k}{2}}$ où $|\det_F|^{\frac{k}{2}}$ est à valeurs dans $(q^{\frac{1}{2}})^{k\mathbb{Z}}$. En posant $\rho_t = \nu_{1,s-2t+1}$, on a par définition $a_{\pi_1}(\rho_t) > 0$. Pour appliquer les résultats du paragraphe précédent, en plus de devoir supposer qu'on a $q \neq 1 \mod \ell$, la condition (a) du Lemme 6.3.1.1 se traduit par $s - 2t + 1 \neq 0 \mod o_R(q)$, où $o_R(q)$ est l'ordre de q dans $R^\times$. Si l'on considère W_1 et W_2 comme fixés, il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers ℓ pour lesquels il peut exister $0 < t \leq m_1$ tel que $s - 2t + 1 = 0 \mod o_R(q)$. Nous avons également besoin d'autres hypothèses sur α et t qui apparaîtront dans la preuve du résultat suivant :

Proposition 6.3.2.1. *On suppose que $q \neq 1 \mod \ell$. Soit $\pi_1 \in Irr_R(H_1)$ dans le bord de $I(-s)$. On suppose qu'il existe $0 < t \leq m_1$ tel que :*
(a) $s - 2t + 1 \neq 0 \mod o_R(q)$;
(b) $t \neq 0 \mod o_R(q)$;
(c) $s - t \neq 0 \mod o_R(q)$;
(d) $a_{\pi_1}(\rho) > 0$ où $\rho = \nu_{1,s-2t+1}$.
Soit $\sigma \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-a})$ telle que $\pi_1 \hookrightarrow \sigma_{\rho,a}$. Alors pour tout quotient irréductible π_2 de $\Theta(\pi_1, W_2^{m_2})$:
— *il existe $\delta \in \mathrm{Irr}_R(H_2^{m_2-a})$ telle que $\pi_2 \hookrightarrow \delta_{\rho,a}$;*
— *$a_{\pi_2}(\rho) = a$;*
— *l'inclusion $\pi_2 \hookrightarrow \delta_{\rho,a}$ induit un morphisme :*

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{H_1 \times H_2}(\omega_{m_1,m_2}, \pi_1 \otimes \pi_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{H_1^{m_1-a} \times H_2^{m_2-a}}(\omega_{m_1-a,m_2-a}, \sigma \otimes \delta).$$

En particulier δ est un quotient irréductible de $\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$.

Démonstration. On va d'abord montrer que la représentation π_2 s'injecte dans une représentation de la forme $\delta_{\rho,a}$. Il s'agira ensuite de montrer que a est maximal pour cette propriété. Tout d'abord, d'après la Remarque 1.2.3.3, la représentation ρ est automatiquement projective et injective modulo le centre car $G_1^{m_1}$ est abélien. L'hypothèse (a) permet donc d'appliquer le Lemme 6.3.1.1. La représentation $\rho^{\times a}$ est alors irréductible et $\sigma_{\rho,a}$ admet une unique sous-représentation irréductible.

Ensuite, la représentation irréductible $\pi_1 \otimes \pi_2$ est un quotient de ω_{m_1,m_2}, on a donc via l'inclusion $\pi_1 \hookrightarrow \sigma_{\rho,a}$ que $\mathrm{Hom}_{H_1 \times H_2}(\omega_{m_1,m_2}, \sigma_{\rho,a} \otimes \pi_2)$ n'est pas réduit à 0. Par réciprocité de Frobenius, on obtient :

$$\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1} \times H_1^{m_1-a} \times H_2}(R_{1_a}(\omega_{m_1,m_2}), \rho^{\times a} \otimes \sigma \otimes \pi_2) \neq 0.$$

Ce foncteur de Jacquet admet une filtration dont les sous-quotients $(J_k)_{0 \leq k \leq a}$ sont donnés explicitement par le Théorème 5.1.3.1. On rappelle qu'on a ici $a \leq m_1$. Le sous-quotient J_a est alors une sous-représentation de $R_{1_a}(\omega_{m_1,m_2})$. On a donc un morphisme de restriction induit par l'inclusion $J_a \hookrightarrow R_{1_a}(\omega_{m_1,m_2})$:

$$\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1} \times H_1^{m_1-a} \times H_2}(R_{1_a}(\omega_{m_1,m_2}), \rho^{\times a} \otimes \sigma \otimes \pi_2) \to \mathrm{Hom}_{G_a^{m_1} \times H_1^{m_1-a} \times H_2}(J_a, \rho^{\times a} \otimes \sigma \otimes \pi_2).$$

Cette flèche est injective. Pour le prouver, il suffit de remarquer que pour tout $0 \leq k < a$ on a

$$\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1} \times H_1^{m_1-a} \times H_2}(J_k, \rho^{\times a} \otimes \sigma \otimes \pi_2) = 0.$$

En effet, on va montrer que $\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1}}(J_k, \rho^{\times a}) = 0$, ce qui entrainera le résultat. La filtration du Théorème 5.1.3.1 montre que J_k est $\mathrm{Ind}_{Q_{a-k}^a}^{G_a^{m_1}}(\nu_{a-k,s+a-k} \otimes \nu_{k,s+k})$-isotypique en tant que représentation de $G_a^{m_1}$. Il s'agit donc de montrer que :

$$\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1}}(\mathrm{Ind}_{Q_{a-k}^a}^{G_a^{m_1}}(\nu_{a-k,s+a-k} \otimes \nu_{k,s+k}), \rho^{\times a}) = 0.$$

Comme $\rho^{\times a}$ est admissible, c'est équivalent à prouver que :

$$\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1}}((\rho^{\times a})^\vee, \mathrm{Ind}_{Q_{a-k}^a}^{G_a^{m_1}}(\nu_{a-k,-s-(a-k)} \otimes \nu_{k,-s-k})) = 0.$$

Par unicité du support cuspidal, cet espace est réduit à 0 si $a > 2$. Dans le cas contraire, on doit avoir ou bien $a = 1$, ou bien $a = 2$ et $a - k = k = 1$. Cela impose dans le premier cas que $\nu_{1,-s-1} = \rho^\vee = \nu_{1,-s_\alpha}$ *i.e.* $t = 0 \mod o_R(q)$. Dans le deuxième cas, on obtient la même condition. D'après l'hypothèse (b), on a $t \neq 0 \mod o_R(q)$. Donc $\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1}}(J_k, \rho^{\times a}) = 0$ pour tout $0 \leq k < a$.

L'existence de cette injection entraîne que :

$$\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1} \times H_1^{m_1-a} \times H_2}(J_a, \rho^{\times a} \otimes \sigma \otimes \pi_2) \neq 0.$$

Il nous reste à calculer $(J_a)_{\rho^{\times a} \otimes \sigma}$. On rappelle que :

$$J_a = \mathrm{Ind}_{P_a^{m_2}}^{H_2}\Big(C_c^\infty(\mathrm{Hom}(X_{1_a}, X_{2_a})) \otimes \omega_{m_1-a,m_2-a}\Big),$$

et donc $(J_a)_{\rho^{\times a} \otimes \sigma} = \rho^{\times a} \otimes \sigma \otimes \mathrm{Ind}_{P_a^{m_2}}^{H_2}\Big((\rho^{\times a})^\vee \otimes \Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})\Big)$. Cela donne un morphisme non-trivial :

$$(\rho^{\times a})^\vee \rtimes \Theta(\sigma, W_2^{m_2-a}) \to \pi_2.$$

En dualisant et en appliquant l'involution MVW, on obtient :

$$\pi_2 \hookrightarrow \rho^{\times a} \rtimes (\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})^\vee)^{\mathrm{MVW}}.$$

On en déduit qu'il existe un sous-quotient irréductible de $\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ tel que $\pi_2 \hookrightarrow \rho^{\times a} \rtimes \delta$. On rappelle que les représentations $\left(\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})^\vee\right)^{\mathrm{MVW}}$ et $\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ ont même sous-quotients puisque la contragrédiente et l'involution MVW sont exactes, et pour toute représentation irréductible on a $\left(\tau^\vee\right)^{\mathrm{MVW}} \simeq \tau$.

En ce qui concerne la maximalité de a, soit $b \geq a$ et δ' une représentation irréductible telle que :

$$\pi_2 \hookrightarrow \rho^{\times b} \rtimes \delta'.$$

On procède comme précédemment. L'injection précédente entraîne que :

$$\mathrm{Hom}_{H_1 \times G_b^{m_2} \times H_2^{m_2-b}}(R_{2_b}(\omega_{m_1,m_2}), \pi_1 \otimes \rho^{\times b} \otimes \delta') \neq 0.$$

En effet, les espaces $\mathrm{Hom}_{H_1 \times G_b^{m_2} \times H_2^{m_2-b}}(J_k, \pi_1 \otimes \rho^{\times b} \otimes \delta')$ sont nuls si $0 \leq k < b-1$. S'ils étaient non nuls, cela entrainerait par unicité du support cuspidal, ou bien $b = 1$, ou bien $b = 2$ et $b - k = k = 1$. La condition analogue est cette fois $s - t = 0 \mod o_R(q)$. On déduit donc de l'hypothèse (c) :

$$\mathrm{Hom}_{H_1 \times G_b^{m_2} \times H_2^{m_2-b}}(J_b, \pi_1 \otimes \rho^{\times b} \otimes \delta') \neq 0.$$

Et par un calcul encore similaire :

$$(J_b)_{\rho^{\times b} \otimes \delta'} = \mathrm{Ind}_{P_b^{m_1}}^{H_1}\left(\left(\rho^{\times b}\right)^\vee \otimes \Theta(\delta', W_1^{m_1-b})\right) \otimes \rho^{\times b} \otimes \delta'.$$

Il existe donc un morphisme non-trivial :

$$\left(\rho^{\times b}\right)^\vee \rtimes \Theta(\delta', W_1^{m_1-b}) \to \pi_1.$$

Enfin, comme précédemment, il existe un sous-quotient irréductible σ' de $\Theta(\delta', W_1^{m_1-b})$ tel que :

$$\pi_1 \hookrightarrow \rho^{\times b} \rtimes \sigma'.$$

Le Corollaire 6.3.1.2 de la partie précédente entraîne que $b = a$ et $\sigma' \simeq \sigma$.

Il reste enfin à prouver la dernière assertion de la proposition. Soit δ irréductible telle qu'on ait $\pi_2 \hookrightarrow \rho^{\times a} \rtimes \delta$. Il existe bien un tel δ d'après ce qui précède, et a est maximal pour cette propriété. Dans les lignes ci-dessus, on a prouvé que l'on avait une injection :

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{H_1 \times H_2}(\omega_{m_1,m_2}, \pi_1 \otimes \pi_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{H_1 \times G_a^{m_2} \times H_2^{m_2-a}}(J_a, \pi_1 \otimes \rho^{\times a} \otimes \delta)$$

En calculant $(J_a)_{\rho^{\times a}}$, on obtient :

$$\mathrm{Hom}_{H_1 \times G_a^{m_2} \times H_2^{m_2-a}}(J_a, \pi_1 \otimes \rho^{\times a} \otimes \delta) = \mathrm{Hom}_{H_1 \times H_2^{m_2-a}}(\left(\rho^{\times a}\right)^\vee \rtimes \omega_{m_1-a,m_2-a}, \pi_1 \otimes \delta).$$

La dualité de Casselman entraîne que ces derniers sont égaux à :

$$\mathrm{Hom}_{G_a^{m_1} \times H_1^{m_1-a} \times H_2^{m_2-a}}(\left(\rho^{\times a}\right)^\vee \otimes \omega_{m_1-a,m_2-a}, R_{1_a}^{\mathrm{op}}(\pi_1) \otimes \delta).$$

L'image de ces morphismes est contenue dans la partie $\left(\rho^{\times a}\right)^\vee$-isotypique de $R_{1_a}^{\mathrm{op}}(\pi_1)$, que l'on note $R_{1_a}^{\mathrm{op}}(\pi_1)^{(\rho^{\times a})^\vee}$. Soit w un élément de $U(W_1^{m_1})$ qui conjugue $P(X_{1_{ra}})$ et $P^{\mathrm{op}}(X_{1_{ra}})$ et normalise le Levi :

$$\begin{aligned} M(X_{1_{ra}}) &= P(X_{1_{ra}}) \cap P^{\mathrm{op}}(X_{1_{ra}}) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & (a^*)^{-1} \end{bmatrix} \mid (a,u) \in \mathrm{GL}_E(X_{1_{ra}}) \times U(W_1^{m_1-ra}) \right\} \end{aligned}$$

en agissant comme $a \mapsto (a^*)^{-1} = {}^c({}^t a^{-1})$ sur $\mathrm{GL}_E(X_{1_{ra}})$ et l'identité sur $U(W_1^{m_1-ra})$. Alors on a un isomorphisme de représentations :

$$R_{1_a}^{\mathrm{op}}(\pi_1)^{(\rho^{\times a})^\vee} \simeq ((R_{1_a}(\pi_1)_{\rho^{\times a}})^w$$

où w désigne la conjugaison par l'élément en question. D'après la preuve du Lemme 6.3.1.1, la représentation de droite est $(\rho^{\times a} \otimes \sigma)^w = (\rho^{\times a})^\vee \otimes \sigma$. En résumé, on a :

$$\mathrm{Hom}_{H_1 \times G_a^{m_1} \times H_2^{m_2-a}}(J_a, \pi_1 \otimes \rho^{\times a} \otimes \delta) = \mathrm{Hom}_{H_1^{m_1-a} \times H_2^{m_2-a}}(\omega_{m_1-a,m_2-a}, \sigma \otimes \delta).$$

D'où δ est un quotient irréductible de $\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$. □

6.3.3 Fin de la preuve

On peut maintenant prouver des énoncés plus faibles que la correspondance de Howe. On pose toujours $s = n_2 - n_1 + \eta_1$.

Les représentations hors du bord ont été traitées dans la Section 6.2. Ensuite, on peut traiter par récurrence une représentation du bord quand les hypothèses des deux résultats suivants sont satisfaites :

Hérédité de l'irréductibilité.

Théorème 6.3.3.1. *Soit $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$ une représentation irréductible dans le bord de $I(-s)$. On suppose qu'il existe $0 < t \leq m_1$ tel que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*
(a) $s - 2t + 1 \neq 0 \mod o_R(q)$;
(b) $t \neq 0 \mod o_R(q)$;
(c) $s - t \neq 0 \mod o_R(q)$;
(d) $a = a_{\pi_1}(\rho) > 0$ où $\rho = \nu_{1,s-2t+1}$.
Soit $\sigma \in \mathrm{Irr}_R(H_2^{m_2-a})$ telle que π_1 soit l'unique sous-représentation irréductible de $\sigma_{\rho,a}$. Alors, si la représentation $\theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ est irréductible, la représentation $\theta(\pi_1, W_2)$ est l'unique sous-représentation irréductible de $\theta(\sigma, W_2^{m_2-a})_{\rho,a}$.

Démonstration. Soit π_2 une sous-représentation irréductible de $\theta(\pi_1, W_2)$. Par hypothèse, la représentation $\theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ est l'unique quotient irréductible de $\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$. Alors la Proposition 6.3.2.1 se reformule ainsi :

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{H_1 \times H_2}(\omega_{m_1,m_2}, \pi_1 \otimes \pi_2) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{H_1^{m_1-a} \times H_2^{m_2-a}}(\omega_{m_1-a,m_2-a}, \sigma \otimes \theta(\sigma, W_2^{m_2-a}))$$

où π_2 est alors l'unique sous-représentation irréductible de $\rho^{\times a} \rtimes \theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ d'après le Lemme 6.3.1.1 et la Proposition 6.3.2.1. Cela prouve que $\theta(\pi_1, W_2)$ est isotypique. En ce qui concerne la multiplicité, l'hypothèse sur $\theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ impose que :

$$\dim \mathrm{Hom}_{H_1^{m_1-a} \times H_2^{m_2-a}}(\omega_{m_1-a,m_2-a}, \sigma_1 \otimes \theta(\sigma_1, W_2^{m_2-a_\alpha})) = 1.$$

Par l'injection précédente, cela entraîne le résultat escompté pour $\mathrm{Hom}_{H_1 \times H_2}(\omega_{m_1,m_2}, \pi_1 \otimes \pi_2)$. Donc la représentation $\theta(\pi_1, W_2)$ est irréductible. □

Hérédité de l'unicité.

Lemme 6.3.3.2. *Soient* π_1 *et* π_1' *dans* $\mathrm{Irr}_R(H_1)$*. On suppose que* $\theta(\pi_1, W_2) = \theta(\pi_1', W_2)$ *est irréductible. Soit* $0 < t \leq m_2$ *tel que* π_1*, resp.* π_1'*, soit l'unique sous-représentation irréductible de* $\sigma_{\rho,a_{\pi_1}(\rho)}$ *pour* $\sigma \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-a_{\pi_1}(\rho)})$*, resp.* $\sigma'_{\rho,a_{\pi_1'}(\rho)}$ *pour* $\sigma' \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-a_{\pi_1}(\rho)})$*, où* $\rho = \nu_{1,s-2t+1}$*. On suppose que :*
(a) $s - 2t + 1 \neq 0 \mod o_R(q)$ *;*
(b) $t \neq 0 \mod o_R(q)$ *;*
(c) $s - t \neq 0 \mod o_R(q)$*.*
Alors :

$$a_{\pi_1}(\rho) = a_{\pi_1'}(\rho) = a \text{ et } \mathrm{Hom}_{H_2^{m_2-a}}(\theta(\sigma, W_2^{m_2-a}), \theta(\sigma', W_2^{m_2-a})) \neq 0.$$

En particulier, si $\mathrm{Hom}_{H_2^{m_2-a}}(\theta(\sigma, W_2^{m_2-a}), \theta(\sigma', W_2^{m_2-a})) \neq 0$ *entraîne que* $\sigma \simeq \sigma'$*, alors* $\pi_1 \simeq \pi_1'$*.*

Démonstration. D'après la Proposition 6.2.0.11, l'égalité $\theta(\pi_1, W_2) = \theta(\pi_1', W_2) = \pi_2 \neq 0$ n'est possible qu'à condition qu'il existe $0 < t \leq m_1$ et ρ_1, ρ_1' dans $\mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1-t})$ tels que :

$$\pi_1 \to \nu_{tX,-s-t} \rtimes \rho_1 \quad \text{et} \quad \pi_1' \to \nu_{tX,-s-t} \rtimes \rho_1'.$$

Donc on a bien $a_{\pi_1}(\rho)$ et $a_{\pi_1'}(\rho)$ qui sont non nuls. Il existe alors des représentations irréductibles σ et σ' telles que :

$$\pi_1 \to \rho^{\times a_{\pi_1}(\rho)} \rtimes \sigma \quad \text{et} \quad \pi_1' \to \rho^{\times a_{\pi_1'}(\rho)} \rtimes \sigma'.$$

La proposition 6.3.2.1 entraîne que $a_{\pi_1}(\rho) = a_{\pi_1'}(\rho)$ puisque ces deux entiers sont tous deux égaux à $a_{\pi_2}(\rho)$. Ensuite, π_2 est à la fois l'unique sous-représentation irréductible de $\rho^{\times a} \rtimes \delta$ et de $\rho^{\times a} \rtimes \delta'$ où δ et δ' sont des quotients irréductibles de $\Theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ et $\Theta(\sigma', W_2^{m_2-a})$. Par conséquent, on applique le Corollaire 6.3.1.2 pour en déduire que $\delta \simeq \delta'$. Donc $\theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ et $\theta(\sigma, W_2^{m_2-a})$ partagent cette représentation irréductible. Pour terminer, si $\sigma \simeq \sigma'$, le Lemme 6.3.1.1 entraîne que π_1 et π_1' sont isomorphes par unicité de la sous-représentation irréductible de $\nu_{1,s_\alpha} \rtimes \sigma \simeq \nu_{1,s_\alpha} \rtimes \sigma'$. □

Le cas banal. Il n'existe qu'un nombre fini de premiers ℓ pour lesquels les hypothèses sur s, t et $o_R(q)$ peuvent ne pas être vérifiées. On en déduit une condition sur $o_R(q)$ pour que la correspondance thêta locale soit vraie dans le cas modulaire :

Théorème 6.3.3.3. *On suppose (H). Soit* $\pi_1 \in \mathrm{Irr}_R(H_1)$*. On suppose que* ℓ *est suffisamment grand de sorte que* $o_R(q) > n_1 + 2m_1$*. Alors :*
— *soit* $\Theta(\pi_1, W_2)$ *est nul ;*
— *soit* $\Theta(\pi_1, W_2)$ *possède un unique quotient irréductible* $\theta(\pi_1, W_2)$*. Auquel cas :*

$$\pi_1 \simeq \pi_1' \Leftrightarrow \theta(\pi_1, W_2) \simeq \theta(\pi_1', W_2).$$

Démonstration. On applique le Théorème 6.2.0.10 pour les représentations hors du bord de $I(-s)$. Pour celles qui sont dans le bord, on procède par récurrence finie en supposant que les énoncés sur l'irréductibilité et l'unicité du Théorème 6.3.3.3 sont vrais pour tout $\pi_1' \in \mathrm{Irr}_R(H_1^{m_1'})$ et pour tout $W_2^{m_2'}$, où $m_1' < m_1$ et $n_2' \leq n_1' - \eta_1$. Le Théorème 6.3.3.1 et le Lemme 6.3.3.1 assurent alors l'irréductibilité et l'unicité quand $\theta(\pi_1, W_2) \neq 0$.

L'initialisation de cette récurrence finie provient du fait que l'on peut toujours se ramener à une représentation qui n'est pas dans le bord. Enfin, l'hypothèse $o_R(q)$ et la Proposition 5.2.3.1 entraînent que la représentation $\Theta(\pi_1, W_2)$ est de longueur finie, donc on a bien $\Theta(\pi_1, W_2) \neq 0$ si et seulement si $\theta(\pi_1, W_2) \neq 0$. $\square$

Chapitre 7

Quelques compatibilités pour la réduction $\overline{\mathbb{Z}_l} \to \overline{\mathbb{F}_l}$

Le but de cette section est double. Il s'agit d'abord de montrer quelques arguments de réduction qui pourraient permettre de relaxer l'hypothèse (H) de la Section 6.2. On se ramène dans la Remarque 7.2.0.10 à un problème d'irréductibilité dans la bande stable – ou « stable range ». Enfin, ces arguments permettent également de donner des contre-exemples dans le cas non banal.

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2 et de caractéristique résiduelle p. Avec les notations précédentes, on se concentre ici au cas où $R = \overline{\mathbb{Q}_l}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_l$ avec $l \neq 2, p$. On fixe une racine carrée de p dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$. Il existe une unique valuation notée val qui étend la valuation $\mathbb{Q}_l$ à $\overline{\mathbb{Q}_l}$. On a $\mathrm{val}(l) = 1$. Ainsi $\overline{\mathbb{Z}_l} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_l} \mid \mathrm{val}(x) \geq 0\}$ et $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_l} \mid \mathrm{val}(x) > 0\}$. En particulier, on a l'isomorphisme suivant qui provient de la réduction modulo l :

$$\mathfrak{r}_l : \overline{\mathbb{Z}_l} \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{Z}_l}/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \simeq \overline{\mathbb{F}_l}.$$

On fixe un caractère additif non trivial ψ de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$. On voit facilement que l'image de ψ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^\times$. La réduction $\mathfrak{r}_l$ induit un isomorphisme de groupes :

$$\mathfrak{r}_l : \overline{\mathbb{Z}_l}^\times \twoheadrightarrow \overline{\mathbb{Z}_l}^\times/(1 + \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}) \simeq \overline{\mathbb{F}_l}^\times.$$

On peut alors réduire ψ modulo l en le composant avec $\mathfrak{r}_l$. On obtient un caractère additif non trivial $\psi_{\overline{\mathbb{F}_l}} = \mathfrak{r}_l(\psi)$ de F à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}_l}$.

7.1 Représentation de Weil et réduction modulo ℓ

Soit W un espace symplectique sur F. Soit R un corps algébriquement clos. On écrit $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_R$ pour signifier le groupe métaplectique $\mathrm{Sp}(W) \times R^\times$ sur R muni du 2-cocyle métaplectique, de sorte que $\widehat{\mathrm{Sp}(W)} = \mathrm{Sp}(W) \times \{\pm 1\}$. Pour tout sous-anneau A de R, on note $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_A = \mathrm{Sp}(W) \times A^\times$ le sous-groupe de $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_R$. Soient $\omega_{\psi, \overline{\mathbb{Q}_l}}$ la représentation de Weil de $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}$ et $\omega_{\mathfrak{r}_l(\psi), \overline{\mathbb{F}_l}}$ celle de $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{F}_l}}$.

Lemme 7.1.0.4. *Il existe un sous-$\overline{\mathbb{Z}_l}$-module libre $\omega_{\psi, \overline{\mathbb{Z}_l}}$ de $\omega_{\psi, \overline{\mathbb{Q}_l}}$ qui est stable par l'action de $\widetilde{Sp(W)}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}$ et dont la réduction modulo l est $\omega_{\mathfrak{r}_l(\psi), \overline{\mathbb{F}_l}}$.*

Démonstration. Examinons les formules de la Section 4.2.1 liées au modèle de Schrödinger pour une polarisation complète $W = X + X^*$. Ainsi, le modèle explicite pour $\omega_{\psi,\overline{\mathbb{Q}_l}}$ se réalise comme $C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{Q}_l}}$, qui est l'ensemble des fonctions lisses à support compact dans X^* à valeurs dans $C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{Q}_l}}$ muni d'une action de $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}$. Soit $C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{Z}_l}}$ le sous-$\overline{\mathbb{Z}_l}$-module libre de $C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{Q}_l}}$ constitué des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}_l}$. De plus, les formules de la Proposition 4.4.0.15 assurent qu'il est stable par $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}$. En effet, la section t_{Per} qui réduit le cocycle c_X est à valeurs dans les racines 8-ème de l'unité d'après car le facteur de Weil (cf. Proposition 4.4.0.12) l'est. Or, celles-ci sont dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^\times$ car $l \neq 2$. Ensuite, les mesures de Haar et mesures de Haar quotients qui y sont définies sont compatibles à la réduction modulo l (voir [KM17, §2.2] pour la réduction des mesures et mesures quotients). Enfin, les différentes quantités restantes sont : les valeurs de ψ, qui sont bien dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^\times$; des puissances de $|.|^{\frac{1}{2}}$, qui ne sont que des puissances de $p^{\frac{1}{2}}$, donc dans $\overline{\mathbb{Z}_l}^\times$ car $l \neq p$. La réduction de $C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{Z}_l}}$ modulo l est donc :

$$C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{Z}_l}} / \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \simeq C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{F}_l}}.$$

Cette réduction est équivariante pour l'action de $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}$ et le sous-groupe central :

$$1 + \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \simeq \{(1,\lambda) \in \widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \mid \lambda \in 1 + \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}\}$$

agit comme l'identité. Cela munit donc $C_c^\infty(X^*)_{\overline{\mathbb{F}_l}}$ d'une action de :

$$\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} / (1 + \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}}) \simeq \widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_{\overline{\mathbb{F}_l}}$$

qui est exactement la représentation de Weil $\omega_{\mathfrak{r}_l(\psi),\overline{\mathbb{F}_l}}$ sur $\overline{\mathbb{F}_l}$ associée au caractère $\mathfrak{r}_l(\psi)$ et au modèle de Schrödinger pour la polarisation complète $W = X + X^*$. □

7.2 Compatibilité de $\Theta(1, W_2)$ dans le cas W_2 scindé

Proposition 7.2.0.5. *Soit $(U(W_1), U(W_2))$ une paire duale de type I dans $Sp(W_1 \otimes W_2)$ et ω_{m_1,m_2} la représentation de Weil pour la tour de Witt associée (cf. Section 5.1.1). On suppose que W_2 est scindé. On pose $s = n_1 - n_2 - \eta_1$. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \omega_{m_1,m_2,\overline{\mathbb{Z}_l}} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\mathfrak{r}_l"] & \Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2) \arrow[d, two heads, "\mathfrak{r}_l"] \\ \omega_{m_1,m_2,\overline{\mathbb{F}_l}} \arrow[r] & \Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1, W_2) \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont données par le Théorème 5.1.2.1, celle du haut provenant de la restriction du morphisme de représentations $\omega_{m_1,m_2,\overline{\mathbb{Q}_l}} \to \Theta_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(1, W_2)$ aux sous-$\overline{\mathbb{Z}_l}$-modules en question. Ici, la représentation $\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2)$ est le $\overline{\mathbb{Z}_l}$-module $\{h_2 \in H_{2,\overline{\mathbb{Z}_l}} \mapsto (\omega_{m_1,m_2}((1,1),h_2).f)(0) \in \overline{\mathbb{Z}_l} \mid f \in \omega_{m_1,m_2,\overline{\mathbb{Z}_l}}\}$ muni de l'action par translation à droite de $H_{2,\overline{\mathbb{Z}_l}}$.

Démonstration. Il existe une définition qui est « intrinsèque » des flèches $\omega_{m_1,m_2} \to \Theta(1, W_2)$ en un sens que l'on va décrire. Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et p. On suppose qu'il existe un sous-anneau A de R, avec $R = \mathrm{Frac}(A)$, et un sous-A-module libre $\omega_{m_1,m_2,A}$ de $\omega_{m_1,m_2,R}$ stable par l'action $\widetilde{\mathrm{Sp}(W)}_A$. Alors, en choisissant un lagrangien X_2 de W_2, une décomposition $W_2 = X_2 + X_2^*$ et la représentation de Weil associée au modèle de Schrödinger pour $W = W_1 \otimes X_2 + W_1 \otimes X_2^*$, on obtient comme modèle $C_c^\infty(W_1 \otimes X_2^*)_A$ pour $\omega_{m_1,m_2,A}$. Ensuite, d'après le Théorème 5.1.2.1, le plus grand quotient $1_{U(W_1)}$-isotypique $\Theta_R(1, W_2)$ de $\omega_{m_1,m_2,R}$ est obtenu via :

$$f \in C_c^\infty(W_1 \otimes X_2^*)_R \mapsto \phi_f \in \Theta_R(1, W_2)$$

où $\phi_f : h_2 \in H_2 \mapsto (\omega_{m_1,m_2,R}((1,1), h_2).f)(0) \in R$. Cette flèche induit alors une flèche :

$$f \in C_c^\infty(W_1 \otimes X_2^*)_A \mapsto \phi_{f,A} \in \Theta_A(1, W_2)$$

où $\phi_{f,A} : h_2 \in H_{2,A} \mapsto (\omega_{m_1,m_2,A}((1,1), h_2).f)(0) \in A$. On remplace maintenant R par $\overline{\mathbb{Q}_l}$ et A par $\overline{\mathbb{Z}_l}$. On obtient alors grâce à cette description en termes d'espaces de fonctions sur $H_{2,\overline{\mathbb{Z}_l}}$ et à la compatibilité à la réduction $\mathfrak{r}_l(\omega_{m_1,m_2,\overline{\mathbb{Z}_l}}) = \omega_{m_1,m_2,\overline{\mathbb{F}_l}}$ du Lemme 7.1.0.4 que $\mathfrak{r}_l(\phi_{f,\overline{\mathbb{Z}_l}}) = \phi_{\mathfrak{r}_l(f),\overline{\mathbb{F}_l}}$. Le morphisme de réduction $\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2) \to \Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1, W_2)$ est donc bien surjectif. □

Remarque 7.2.0.6. Malheureusement, on ne sait pas *a priori* que le diagramme suivant est commutatif, où les flèches horizontales sont données par les inclusions naturelles du Théorème 5.1.2.1 :

$$\begin{tikzcd} \Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2) \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{r}_l"] & I_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(s) \arrow[d, "\mathfrak{r}_l"] \\ \Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1, W_2) \arrow[r] & I_{\overline{\mathbb{F}_l}}(s) \end{tikzcd}$$

La difficulté vient du fait que l'on ne connait pas précisément le noyau du morphisme de $\overline{\mathbb{Z}_l}$-représentations :

$$\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2) \to I_{\overline{\mathbb{F}_l}}(s) = I_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(s)/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{F}_l}} I_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(s).$$

Ce dont est sûr en revanche, c'est que ce noyau est une sous-représentation stricte de $\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2)$ qui contient $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} \Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2)$. En définitive, le morphisme de $\overline{\mathbb{Z}_l}$-représentation $\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2) \to I_{\overline{\mathbb{F}_l}}(s)$ se factorise toujours en une flèche non nulle $\Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1, W_2) \to I_{\overline{\mathbb{F}_l}}(s)$, qu'on ne sait pas prouver être l'inclusion naturelle dans l'induite.

Lemme 7.2.0.7. *On reprend les notations précédentes et on suppose que la paire duale est de type I commutative (cf. tableau Section 2.3). Si $s = n_1 - n_2 - \eta_1 \leq 0$, on a un morphisme surjectif dans $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(H_{2,\overline{\mathbb{Q}_l}})$:*

$$I_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(-s) \twoheadrightarrow \Theta_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(1, W_2)$$

qui se réduit modulo l en un morphisme surjectif dans $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{F}_l}}(H_{2,\overline{\mathbb{F}_l}})$:

$$I_{\overline{\mathbb{F}_l}}(-s) \twoheadrightarrow (\Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1, W_2)^\vee)^{MVW}.$$

Démonstration. D'après [GI14, Prop. 7.2], l'hypothèse $s \leq 0$ entraîne que la représentation $\Theta_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(1, W_2)$. Par conséquent, en dualisant et en appliquant l'involution MVW, l'inclusion $\Theta_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(1, W_2) \hookrightarrow I_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(s)$ entraîne l'existence d'une surjection $I_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(-s) \twoheadrightarrow \Theta_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(1, W_2)$. D'après la Proposition 7.2.0.5, l'inclusion précédente se restreint en $\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2) \hookrightarrow I_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(s)$. On peut dualiser et appliquer l'involution MVW, ce qui donne une surjection :

$$I_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(-s) \twoheadrightarrow (\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2)^\vee)^{\mathrm{MVW}}$$

que l'on peut réduire modulo l en une surjection :

$$I_{\overline{\mathbb{F}_l}}(-s) \twoheadrightarrow \mathfrak{r}_l((\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2)^\vee)^{\mathrm{MVW}}).$$

Or, la réduction modulo l est compatible à la contragrédiente et à l'involution MVW. Tout d'abord, la compatibilité à la contragrédiente est vraie d'après [Vig96, I.9.7]. Cela signifie ici que $\mathfrak{r}_l(\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2)^\vee) \simeq \Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1, W_2)^\vee$. De même, l'involution MVW est compatible elle aussi à la réduction modulo l. Cela provient d'un fait plus général dont on occulte la preuve qui ne présente pas de difficulté.

Lemme 7.2.0.8. *Soient G un groupe localement profini et $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ un automorphisme bicontinu. Soit A un anneau. Pour $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_A(G)$, on définit (π^σ, V^σ) comme $V^\sigma = V$ et $\pi^\sigma(g) = \pi(\sigma(g))$. Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(G)$. Alors, si V admet un sous-$\overline{\mathbb{Z}_l}$-module libre L stable par G, on a :*

$$L^\sigma / \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} L^\sigma = (L/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_l}} L)^\sigma.$$

□

Remarque 7.2.0.9. Cette surjection peut aussi être obtenue par une méthode directe. En dualisant et en appliquant l'involution MVW à l'inclusion $\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2) \hookrightarrow I_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(s)$, on obtient le même résultat. On met surtout en lumière ici la compatibilité de la réduction modulo l à la contragrédiente et à l'involution MVW.

Remarque 7.2.0.10. Malheureusement, on ne pas pas obtenir la surjection classique $I_{\mathbb{C}}(-s) \twoheadrightarrow \Theta_{\mathbb{C}}(1, W_2)$ avec des arguments de réduction seuls, même dans la bande stable ($m_2 > n_1$). En effet, on ne sait pas *a priori* que les représentations $(\Theta(1, W_2)^\vee)^{\mathrm{MVW}}$ et $\Theta(1, W_2)$ sont isomorphes. On conjecture que pour W_1 et W_2 fixés dans la bande stable, la représentation $\Theta(1, W_2)$ est irréductible si ℓ est suffisamment grand. L'irréductibilité de $\Theta_{\mathbb{C}}(1, W_2)$ dans la bande stable et au-delà ($m_2 = n_1$) étant déjà connue [KR92], [KS97], [Yam11].

Un contre-exemple. Soit W_2 un espace symplectique de dimension 2 sur F. Via le choix d'une base symplectique (e_1, e_1^*), son groupe d'isométrie est isomorphe à $\mathrm{SL}_2(F)$. Soit $W_1^{m_1}$ la tour de Witt construite à partir de l'espace orthogonal scindé *i.e.* $W_2^0 = 0$. Alors le Corollaire 5.1.2.2 entraîne que $\Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1_{U(W_1^{m_1})}, W_2)$ est une sous-représentation de $I(s) = \mathrm{ind}_{P_{m_2}}^{H_2}(\nu_{X_2,s})$ où $X_2 =< e_1 >$ et $s = n_1 - n_2 - \eta_1 = n_1 - 3$. Et par un scindage $U(W_2) \to H_2$ bien choisi, on se ramène [KR92, p. 210-211] à l'induite $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{SL}_2(F)}(|.|^{\frac{s}{2}})$ où le caractère χ_V de [KR92] est ici trivial et B est le Borel constitué des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{SL}_2(F)$.

Proposition 7.2.0.11 ([KR92])**.** *Si $m_1 > 2$, alors $\mathrm{ind}_B^{SL_2(F)}(|.|^{\frac{s}{2}})$ est irréductible et l'on a :*

$$\Theta_{\mathbb{C}}(1, W_2) = \mathrm{ind}_{P_{m_2}}^{H_2}(\nu_{X_2,s}).$$

On se sert de ce fait pour construire notre contre-exemple. Tout d'abord, le Théorème 5.1.2.1 entraîne qu'on a toujours :

$$\Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1, W_2) \hookrightarrow I_{\overline{\mathbb{F}_l}}(s).$$

De plus, le principe de Brauer-Nesbitt [Vig96, I.9.6] entraîne que ces deux représentations de longueur finie ont même semi-simplifée et sont donc égales. En effet, $\Theta_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(1, W_2)$ et

$I_{\overline{\mathbb{Z}_l}}(s)$ sont deux réseaux de la représentation $I_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(s)$, les semi-simplifiées de leurs réductions modulo ℓ sont donc égales d'après le principe de Brauer-Nesbitt. On se ramène alors à l'étude de l'induite $\mathrm{ind}_B^{\mathrm{SL}_2(F)}(|.|^{\frac{s}{2}})$ qui est à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}_l}$ et dont on connaît les points de réductibilité [Dat05, Ex. p. 47]. En particulier, comme $|\varpi_F|^{\frac{s}{2}} = q^{\frac{1}{2}} q^{m_1 - 2}$:

(i) si $q = -1 \mod \ell$, cette induite est irréductible car $|\varpi_F|^{\frac{s}{2}} \neq -1$;
(ii) si $q = 1 \mod \ell$, cette induite est réductible semi-simple car $|\varpi_F|^{\frac{s}{2}} \in \{\pm 1\}$;
(iii) si $q \neq \pm 1 \mod \ell$ et , cette induite est irréductible car $|\varpi_F|^{\frac{s}{2}} \notin \{-1, q, q^{-1}\}$.

On obtient donc des contre-exemples dans le cas $q = 1 \mod l$. En effet, si $m_1 > 2$, la représentation $\Theta_{\overline{\mathbb{F}_l}}(1_{U(W_1^{m_1})}, W_2)$ est alors réductible semi-simple.

Remarque 7.2.0.12. L'idée derrière ce contre-exemple paraît pouvoir se généraliser à d'autres paires duales que celle que l'on vient de donner. En effet, la Proposition 7.2.0.11 possède des généralisations, et l'argument utilisant le principe de Brauer-Nesbitt fonctionne toujours. Il reste alors, ce qui ne paraît pas non plus si simple, à comprendre les comportements des induites paraboliques en jeu.

Annexe A

Annexe

A.1 Transformée de Fourier

Soit F un corps qui est, soit fini de caractéristique p, soit local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Soit W un espace vectoriel de dimension finie n sur F. On suppose que R est un anneau pour lequel p est inversible. Comme tout sous-groupe ouvert compact de W est de pro-ordre une puissance de p, le Théorème 1.1.1.3 assure l'existence d'une mesure de Haar μ sur W à valeurs R. On note $\widehat{W}_R$ l'ensemble des caractères lisses de W à valeurs dans R. On va montrer en A.1.1 que $\widehat{W}_R$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur F. Quand $\widehat{W}_R$ est de dimension finie, il existe comme précédemment une mesure de Haar $\hat{\mu}$ à valeurs dans R. On explique en A.1.2 qu'on peut choisir $\hat{\mu}$ de telle sorte que cette mesure soit duale vis-à-vis de μ. On considère $C^\infty_{c,R}(W)$ comme une algèbre pour la multiplication point par point, et $\mathcal{H}_R(\widehat{W}_R)$ est l'algèbre de Hecke de $\widehat{W}_R$ associée à la mesure $\hat{\mu}$. On montre au cours de la preuve de la Proposition A.1.2.1 que la transformée de Fourier réalise un morphisme d'algèbres :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & C_c^\infty(W) & \to & \mathcal{H}_R(\widehat{W}_R) \\ & f & \mapsto & (\ \mathcal{F}f : \phi \mapsto \int_W f(g)\phi(g)d\mu(g)\ ) \end{array}.$$

Si l'anneau R est intègre, et s'il existe un caractère $\psi : F \to R^\times$ non trivial, cette application est alors un isomorphisme. Ce résultat est énoncé dans [Vig96, I.3.10] où la preuve est laissée au lecteur. On reproduit en A.1.2 celle donnée dans [CT13, 1.].

A.1.1 Caractères additifs à valeurs dans R

On donne ici une description plus précise de la structure $\widehat{R}$ en fonction des propriétés de R. Pour rappel, les éléments de $\widehat{W}_R$ sont exactement les morphismes de groupes $W \to R^\times$ dont le noyau est ouvert. Tout d'abord, le choix d'une base de W permet de fixer un isomorphisme $W \simeq F^n$. La donnée d'un caractère lisse de W n'est alors ni plus ni moins que la donnée de n caractères lisses de F. C'est l'objet de la première proposition. On note $\widehat{W}_R$ l'ensemble des caractères lisses de G à valeurs dans R. Remarquons que $\widehat{W}_R$ est muni d'une structure de F-espace vectoriel où l'addition sur $\widehat{W}_R$ est la multiplication entre caractères, et la multiplication par un scalaire se fait via $\lambda.\psi : x \mapsto \psi(\lambda x)$, où $\lambda \in F$ et $\psi \in \widehat{W}_R$.

Proposition A.1.1.1. *Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de W sur F. On a un isomorphisme de F-espaces vectoriels :*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{W}_R & \xrightarrow{\sim} & (\widehat{F}_R)^n \\ \varphi & \longmapsto & (x \mapsto \varphi(x\ e_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \end{array}$$

Démonstration. Comme W est muni de la topologie produit issue de F, on a bien que $x \mapsto \varphi(x\ e_i)$ est lisse. On vérifie facilement que c'est une application F-linéaire. Et sa réciproque est simplement $(\psi_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in (\widehat{F}_R)^n \mapsto (x \mapsto \prod \psi_i(x_i)) \in \widehat{W}_R$ où les x_i sont les coordonnées de x dans la base de départ. Le noyau de $\prod \psi_i$ est bien ouvert car c'est un sous-groupe (additif) de W qui contient l'ouvert $U = \prod \mathrm{Ker}(\psi_i)$. □

On voit donc qu'en tant que F-espace vectoriel, la connaissance de $\widehat{W}_R$ est directement reliée à celle de $\widehat{F}_R$. Par exemple : si $\widehat{F}_R$ est de dimension finie m sur F, on saura que $\widehat{W}_R$ est de dimension mn.

Si F est un corps fini. Soit F un corps fini. On sait qu'il existe un premier p et une puissance $q = p^k$ de p tels que $F \simeq \mathbb{F}_q$. Comme F est de dimension k sur $\mathbb{F}_p$, l'isomorphisme de la Proposition A.1.1.1 donne $\widehat{F}_R \simeq (\widehat{\mathbb{F}_p}_R)^k$. Cela nous ramène donc à étudier $\widehat{\mathbb{F}_p}_R$.

En caractéristique p, l'image d'un caractère de $\mathbb{F}_p$ est contenue dans $\mu_p(R) = \{t \in R^\times \mid t^p = 1\}$. C'est un sous-groupe de $R^\times$ qui possède lui aussi une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. On suppose que $\mu_p(R)$ est de dimension finie m.

Proposition A.1.1.2. *On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel*

$$\widehat{W}_R \simeq (\mathbb{F}_p)^{mkn}$$

Démonstration. On a les isomorphismes suivants

$$\widehat{W}_R \underset{(1)}{\simeq} (\widehat{F}_R)^n \underset{(1')}{\simeq} \left((\widehat{\mathbb{F}_p}_R)^k\right)^n \underset{(2)}{\simeq} \left(\widehat{\mathbb{F}_p}_R\right)^{kn} \underset{(3)}{\simeq} (\mu_p(R))^{kn} \underset{(4)}{\simeq} ((\mathbb{F}_p)^m)^{kn} \underset{(2')}{\simeq} (\mathbb{F}_p)^{mkn}$$

(1) et (1′) ont déjà été prouvé et proviennent de la Proposition A.1.1.1. (2) et (2′) sont vrais plus généralement pour tout espace vectoriel. (4) est vrai par hypothèse et provient du choix d'une base de $\mu_p(R)$ sur $\mathbb{F}_p$. Il ne reste alors qu'à prouver (3).

Montrons donc que :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{F}_p}_R & \xrightarrow{\sim} & \mu_p(R) \\ \psi & \mapsto & \psi(1) \end{array}$$

En effet, on vérifie facilement que c'est un morphisme de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, dont la réciproque associe à tout $t \in \mu_p(R)$ le caractère $x \mapsto t^x = x.t$. □

Citons immédiatement le corollaire qui va le plus nous intéresser.

Corollaire A.1.1.3. *En tant que F-espace vectoriel, on a*

$$\widehat{W}_R \simeq (F)^{mn}$$

Démonstration. $\widehat{W}_R$ est de dimension mkn sur $\mathbb{F}_p$ d'après la Proposition A.1.1.2. Comme $F \simeq (\mathbb{F}_p)^k$, on en déduit que $\widehat{W}_R$ est de dimension mn sur F. □

Si F est local non archimédien de caractéristique p. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique p. On sait alors que F est une extension finie de $\mathbb{F}_p((t))$ dont on note $k = [F : \mathbb{F}_p((t))]$ le degré. Comme F est de dimension k sur $\mathbb{F}_p((t))$, l'isomorphisme de la Proposition A.1.1.1 donne $\widehat{F}_R \simeq (\widehat{\mathbb{F}_p((t))}_R)^k$. Cela nous ramène donc à étudier $\widehat{\mathbb{F}_p((t))}_R$.

Comme nous l'avons dit dans la partie précédente : en caractéristique p, l'image d'un caractère de $\mathbb{F}_p$ est contenue dans $\mu_p(R) = \{t \in R^\times \mid t^p = 1\}$. C'est un sous-groupe de $R^\times$ qui possède une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.

Lemme A.1.1.4. *Soit $U \subset \mu_p(R)^{\mathbb{Z}}$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ triviales à partir d'un certain rang i.e. pour lesquelles il existe un entier k tel que pour tout $n \geq k$, $u_n = 1$. On peut le munir d'une structure de $\mathbb{F}_p((t))$-espace vectoriel pour laquelle l'application linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{F}_p((t))}_R & \to & U \\ \psi & \mapsto & (\psi(t^i))_{i\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

réalise un isomorphisme.

Démonstration. Dans U, on définit l'action de t comme l'opérateur décalage à gauche. En d'autres termes, $t.(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Un élément $\alpha \in \mathbb{F}_p$ agit par $\alpha.(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\alpha.u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{Z}}$. Comme les éléments de U sont les suites triviales à partir d'un certain rang, pour tout $x \in \mathbb{F}_p((t))$, chaque terme de $x.(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'implique qu'un nombre fini de termes non triviaux et est alors bien défini. Illustrons notre propos par un exemple. Soit $x = \sum_{i\geq 0} \alpha_i t^i \in \mathbb{F}_p((t))$ avec $\alpha_i \in \mathbb{F}_p$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $u_n = 1$ si $n \geq 1$. Alors :

$$(x.(u_n))_{-2} = (u_{-2})^{\alpha_0}\ (u_{-1})^{\alpha_1}\ (u_0)^{\alpha_2}.$$

On vérifie facilement que l'application $\psi \mapsto (\psi(t^i))_{i\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de $\mathbb{F}_p((t))$-espace vectoriel. Sa réciproque est $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \left(x = \sum \alpha_n t^n \mapsto \prod (u_n)^{\alpha_n}\right)$. Cela donne un caractère bien défini car le produit est en réalité fini : les u_n sont triviaux à partir d'un certain rang ; les α_n sont triviaux avant un certain rang. $\square$

On suppose que $\mu_p(R)$ est de dimension finie m.

Proposition A.1.1.5. *On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_p((t))$-espace vectoriel*

$$\widehat{W}_R \simeq \mathbb{F}_p((t))^{mkn}$$

Démonstration. On veut montrer les isomorphismes suivants

$$\widehat{W}_R \underset{(1)}{\simeq} (\widehat{F}_R)^n \underset{(1')}{\simeq} \left((\widehat{\mathbb{F}_p((t))}_R)^k\right)^n \underset{(2)}{\simeq} \widehat{\mathbb{F}_p((t))}_R^{kn} \underset{(3)}{\simeq} U^{kn} \underset{(4)}{\simeq} \left((\mathbb{F}_p((t)))^m\right)^{kn} \underset{(2')}{\simeq} (\mathbb{F}_p((t)))^{mkn}$$

(1) et (1′) ont déjà été prouvé et proviennent de la Proposition A.1.1.1. (2) et (2′) sont vrais plus généralement pour tout espace vectoriel. (3) provient simplement du Lemme A.1.1.4. Il ne reste alors qu'à prouver (4).

Soit $(g_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une base de $\mu_p(R)$ sur $\mathbb{F}_p$. On va montrer que U et $\mu_p(R)$ ont même dimension sur leurs espaces vectoriels respectifs. Soit donc $P : \alpha \mapsto P(\alpha)$ le plongement de $\mu_p(R)$ dans U défini par $P(\alpha)_n = 1$ si $n \neq 0$, et $P(\alpha)_0 = \alpha$. L'image de la base $(g_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ par P est alors une base de U sur $\mathbb{F}_p((t))$. En effet, elle est libre : si $\prod x_i.P(g_i) = (1)_{n\in\mathbb{Z}}$, alors, si l'on note $x_{i,j} \in \mathbb{F}_p$ le coefficient de t^j dans x_i, on observe que le terme en $n = -j$ est $\prod x_{i,j}.g_i = 1$. Cela signifie que les $x_{i,j}$ sont nuls puisque les $(g_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ sont libres sur $\mathbb{F}_p$. La famille est génératrice : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in U$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, il existe $(x_{i,j})_{i\in[\![1,m]\!]} \in (\mathbb{F}_p)^m$ telle que $\prod x_{i,j}.g_i = u_{-j}$. Alors les $x_i = \sum x_{i,j}t^j$ sont bien définis si les $x_{i,j}$ sont nuls avant un certain rang j_i. Par définition de U, il existe un entier N tel que $\forall n \geq N,\ u_n = 1$. Soit N_0 un tel entier. On a alors pour tout $n \leq -N_0$, l'égalité $\prod x_{i,n}.g_i = 1$. Cela entraîne que si $n \leq -N_0$, on a $x_{i,n} = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. On a donc bien $U \simeq \mathbb{F}_p((t))^m$. □

Comme précédemment :

Corollaire A.1.1.6. *En tant que F-espace vectoriel, on a*

$$\widehat{W}_R \simeq (F)^{mn}$$

Démonstration. $\widehat{W}_R$ est de dimension mkn sur $\mathbb{F}_p((t))$ d'après la Proposition A.1.1.2. Comme $F \simeq (\mathbb{F}_p((t)))^k$, on en déduit que $\widehat{W}_R$ est de dimension mn sur F. □

Cas où F est local non archimédien de caractéristique nulle. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On sait qu'il existe un premier p tel que F soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré $k = [F : \mathbb{Q}_p]$. Comme F est de dimension k sur $\mathbb{Q}_p$, l'isomorphisme de la Proposition A.1.1.1 donne $\widehat{F}_R \simeq (\widehat{\mathbb{Q}_p}_R)^k$. Cela nous ramène donc à étudier $\widehat{\mathbb{Q}_p}_R$.

Soit ψ un caractère de $\mathbb{Q}_p$. On définit le conducteur/niveau de ψ, noté l_ψ (level), comme le plus petit entier n tel que $(p)^n \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Par convention, le caractère trivial est de niveau $-\infty$.

Lemme A.1.1.7. *Les caractères de $\mathbb{Q}_p$ sont à valeurs dans le $\mathbb{Z}_p$-module*

$$A = \{t \in R \mid \exists b \in \mathbb{N},\ t^{p^b} = 1 \text{ et } \forall b' \in \mathbb{N},\ \exists u \in R,\ u^{p^{b'}} = t\}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Q}_p$. Comme $\mathbb{Q}_p/(p)^{l_\psi}$ est un p-groupe, il existe un entier naturel a tel que $\psi(p^a\, x) = 1 = (\psi(x))^{p^a}$. De plus, pour tout entier naturel k, $\psi(p^{-k}\, x)$ doit être une racine p^k-ème de $\psi(x)$. On a donc bien $\psi(x) \in A$. L'action naturelle de $\mathbb{Z}_p$ sur A est « l'élévation à la puissance » : si $t \in A$ et $\lambda = \sum_{i\geq 0} a_i p^i$ avec $a_i \in [\![0, p-1]\!]$, alors $\lambda.t = t^{\bar{\lambda}}$ où $\bar{\lambda}$ est l'image de λ modulo $(\mathrm{ord}(t))$, c'est-à-dire $\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}/\mathrm{ord}(t)\mathbb{Z}$. Rappelons que $\mathrm{ord}(t)$ est une puissance de p si $t \in A$. □

Les éléments de A sont exactement les éléments extraits de familles compatibles de racines pour l'élévation à la puissance p dans $\bigcup_i \mu_{p^i}(R)$. Pour être plus rigoureux : on prend $(\mathbb{Z}, \leq)$ comme ensemble ordonné, la famille constante $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (A)_{n\in\mathbb{Z}}$, et les applications de transitions $f_{i,j} : t \in A \mapsto t^{p^{j-i}} \in A$ si $i \leq j$. On pose alors $\mu_{p^\infty}(R) = \varprojlim E_i$. Ce sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de A telles que $u_n^p = u_{n+1}$ et $u_n = 1$ à partir d'un certain rang. On récupère la structure de $\mathbb{Z}_p$-module de A. Et même plus, en définissant $p^{-1}.(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$, on obtient une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$. Observons que, ainsi, l'action de p^{-1} est bien inverse de celle de p puisque $p.(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (u_n^p)_{n\in\mathbb{Z}} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$.

On suppose que $\mu_{p^\infty}(R)$ est de dimension finie m.

Proposition A.1.1.8. *On a un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel*

$$\widehat{W}_R \simeq (\mathbb{Q}_p)^{mkn}$$

Démonstration. On a les isomorphismes suivants

$$\widehat{W}_R \underset{(1)}{\simeq} (\widehat{F}_R)^n \underset{(1')}{\simeq} \left((\widehat{\mathbb{Q}_p}_R)^k\right)^n \underset{(2)}{\simeq} \widehat{\mathbb{Q}_p}_R^{kn} \underset{(3)}{\simeq} (\mu_{p^\infty}(R))^{kn} \underset{(4)}{\simeq} ((\mathbb{Q}_p)^m)^{kn} \underset{(2')}{\simeq} (\mathbb{Q}_p)^{mkn}$$

(1) et (1′) ont déjà été prouvé et proviennent de la Proposition A.1.1.1. (2) et (2′) sont vrais plus généralement pour tout espace vectoriel. (4) est vrai par hypothèse et provient du choix d'une base de $\mu_{p^\infty}(R)$ sur $\mathbb{Q}_p$. Il ne reste alors qu'à prouver (3).

Montrons donc que

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{Q}_p}_R & \xrightarrow{\sim} & \mu_{p^\infty}(R) \\ \psi & \mapsto & (\psi(p^i))_{i\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

En effet, on vérifie facilement que c'est un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, dont la réciproque associe à tout $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mu_{p^\infty}(R)$ le caractère $x \mapsto (x.u)_0$. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $p^n.u = (u_{k+n})_{k\in\mathbb{Z}}$ et donc $(p^n.u)_0 = u_n$. □

De même que précédemment :

Corollaire A.1.1.9. *En tant que F-espace vectoriel, on a*

$$\widehat{W}_R \simeq (F)^{mn}$$

Démonstration. $\widehat{W}_R$ est de dimension mkn sur $\mathbb{Q}_p$ d'après la Proposition A.1.1.2. Comme $F \simeq (\mathbb{Q}_p)^k$, on en déduit que $\widehat{W}_R$ est de dimension mn sur F. □

Lien avec le dual algébrique W^*. Soit F un corps qui est, soit fini, soit local non archimédien. On suppose qu'il existe un entier naturel m tel que $\widehat{W}_R = (F)^{mn}$. Notons que si R est intègre, on a toujours $m \in \{0, 1\}$.

Remarque A.1.1.10. On peut donner deux interprétations de cet isomorphisme :

— On peut écrire $\widehat{W}_R \simeq ((F)^m)^n \simeq (\widehat{F}_R)^n$. Cela signifie qu'en choisissant une base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de W, un caractère est combinaison linéaire de n caractères obtenus par restriction aux n droites engendrées par les $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

— On peut identifier $\widehat{W}_R \simeq (F^n)^m$. Cela signifie alors qu'un caractère de W est donné par une combinaison linéaire de m caractères d'image distincte, à savoir, d'image les m droites engendrées par les éléments de la base $\mu_p(R)$ sur $\mathbb{F}_p$.

Soit $W^* = \mathrm{Hom}_F(W, F)$ le dual algébrique de W, c'est-à-dire l'ensemble des formes F-linéaires à valeurs dans F. Il est muni d'une structure de F-espace vectoriel évidente, et est de même dimension que W.

Proposition A.1.1.11. *On choisit une base $(\psi_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ de $\widehat{F}_R$ sur F. On a alors :*

$$\begin{array}{ccc} (W^*)^m & \xrightarrow{\sim} & \widehat{W}_R \\ (\alpha_i)_{i\in[\![1,m]\!]} & \longmapsto & (x \mapsto \prod \psi_i \circ \alpha_i) \end{array}$$

Démonstration. Soit ψ un caractère de F et $\alpha \in W^*$. On a bien que $\psi \circ \alpha$ est lisse. En effet, F est localement compact et complet, donc les applications linéaires entre F-espaces vectoriels de dimension finie sont continues. C'est bien le cas ici car W est de dimension mn. Par suite, on a bien que $\mathrm{Ker}(\psi \circ \alpha) = \alpha^{-1}(\mathrm{Ker}(\psi))$ est ouvert. On vérifie facilement que l'application en question est F-linéaire. Si nous montrons qu'elle est injective, ce sera alors un isomorphisme puisque $(W^*)^m$ est aussi de dimension mn. Montrons donc l'injectivité. Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de W sur F. Si $\prod \psi_i \circ \alpha_i$ est le caractère trivial de W, alors pour tout $u \in W$, $x \mapsto \prod \psi_i \circ \alpha_i(x\ u) = (\prod \alpha_i(u).\psi_i)(x)$ est le caractère trivial de F. Comme $(\psi_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ est une base de $\widehat{F}_R$ sur F, on obtient $\alpha_i(u) = 0$ pour tout $u \in W$. □

Exemple. Si $m = 1$ et $n = 1$, alors $\dim_F(\widehat{W}_R) = 1$. On retrouve que l'orbite d'un caractère non trivial sous l'action de F^* contient tous les caractères non triviaux. Ici, cela se résume simplement en disant que la droite engendrée par un vecteur non nul est bien tout l'espace. Et si l'on prive cette droite du vecteur nul (le caractère trivial), on obtient bien l'ensemble des vecteurs non nuls.

Exemple. Si $m = 1$, on a $W^* \simeq \widehat{W}_R$. Ce n'est en revanche pas canonique, car l'isomorphisme de la Proposition A.1.1.11 dépend du choix d'un caractère non trivial de F. Si de plus, W est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $< . , . >$, on identifie W et son dual. Ainsi, la donnée d'un caractère ψ non trivial de F donne un isomorphisme de F-espace vectoriel :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\sim} & \widehat{W}_R \\ x & \longmapsto & (u \mapsto \psi(< x, u >)) \end{array}$$

On déduit des faits précédents :

Corollaire A.1.1.12. *Soit R un anneau. On suppose qu'on a :*

$$\mu^p(R) = \begin{cases} \{\xi \in R^\times \mid \xi^p = 1\} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \textit{si la caractéristique de } F \textit{ est positive ;} \\ \{\xi \in R^\times \mid \exists k \in \mathbb{N}, \xi^{p^k} = 1\} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

$$W^* \simeq \widehat{W}_R.$$

En particulier, un caractère non trivial $\psi : F \to R^\times$ existe.

A.1.2 Résultats concernant la transformée de Fourier

Soit R un anneau intègre dans lequel p est inversible. En particulier, R n'est pas de caractéristique différente de p. On reprend les hypothèses du Corollaire A.1.1.12 sur R, on a alors $W^* \simeq \widehat{W}_R$. Nous avons montré que $\widehat{W}_R$ est un espace vectoriel sur F de même dimension que W, il hérite donc de l'unique topologie qui étend celle de F. 'A ce titre, $\widehat{W}_R$ est alors un groupe localement profini. Pour tout sous-groupe compact ouvert de W (*i.e.* pour tout réseau de W), on définit $\widehat{K}^\perp = \{\phi \in \widehat{W}_R \mid \phi|_K = 1\}$. C'est un sous-groupe compact ouvert de $\widehat{W}_R$. On peut montrer que c'est une correspondance entre les sous-groupes ouverts compacts de W et de $\widehat{W}_R$, qui renverse les indices au sens où $[K : K'] = [\widehat{K'}^\perp : \widehat{K}^\perp]$. Soit μ une mesure de Haar normalisée sur W. Il existe une unique mesure $\widehat{\mu}$ de $\widehat{W}_R$, appelée *mesure duale*, telle que $\widehat{\mu}(\widehat{K}^\perp)\mu(K) = 1$ pour tout sous-groupe compact ouvert K de W.

Proposition A.1.2.1 ([Vig96, I.3.10], [CT13, 1.]). *On a un isomorphisme d'algèbres :*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F} : & C_c^\infty(W) & \to & \mathcal{H}(\widehat{W}_R) \\ & f & \mapsto & (\ \mathcal{F}f : \phi \mapsto \int_W f(g)\phi(g)d\mu(g)\ ) \end{array}$$

et qui a pour inverse :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}^{-1}: & \mathcal{H}(\widehat{W}_R) & \to & C_c^\infty(W) \\ & \Psi & \mapsto & \left(\mathcal{F}^{-1}\Psi : g \mapsto \int_{\widehat{W}_R} \Psi(\phi)\phi(g)d\widehat{\mu}(\phi) \right) \end{array}.$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons les faits suivants qui seront utiles par la suite. Soit K un sous-groupe compact ouvert de W. On a $\int_K \phi(k) = 0$ si $\phi \notin \widehat{K}^\perp$. De plus, pour tout $\phi \in \widehat{K}^\perp$, $\int_K \phi(k)d\mu(k) = \mu(K)$. On a donc $\int_K \phi(k)d\mu(k) = \mu(K)1_{\widehat{K}^\perp}$. Ainsi

$$\mathcal{F}\ 1_{h+K}(\phi) = \int_W 1_{h+K}(g)\phi(g)d\mu(g) = \int_K \phi(h+k)d\mu(k) = \phi(h)\mu(K)1_{\widehat{K}^\perp}$$

L'application $\mathcal{F}^{-1}$ est bien définie car l'évaluation $\phi \mapsto \phi(g)$ est bien un caractère lisse de $\widehat{W}_R$. En effet, g est contenu dans un sous-groupe ouvert compact L de $\widehat{W}_R$. Et par dualité, $\widehat{L}^\perp$ est contenu dans le noyau de l'évaluation en g, donc le noyau est ouvert. Un rapide calcul donne :

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}1_{h+K}(g) = \mu(K)\int_{\widehat{K}^\perp} \phi(h-g)d\widehat{\mu}(\phi) = \mu(K)\widehat{\mu}(\widehat{K}^\perp)1_K(g) = 1_K(g)$$

où il est clair que $\int_{\widehat{K}^\perp} \phi(h-g)d\widehat{\mu}(\phi) = \widehat{\mu}(\widehat{K}^\perp)$ si $g \in K$; et $\int_{\widehat{K}^\perp} \phi(h-g)d\widehat{\mu}(\phi) = 0$ si $g \in K$ car il existe des caractères de $\widehat{K}^\perp$ non-triviaux sur tout élément de $W\backslash K$, donc $\phi \mapsto \phi(h-g)$ est un caractère non-trivial de $\widehat{K}^\perp$. Pour terminer, il faut montrer que $\mathcal{F}(f.f') = \mathcal{F}f \star \mathcal{F}f'$. On a

$$(\mathcal{F}f \star \mathcal{F}f')(\phi) = \int_{\widehat{W}_R} \mathcal{F}f(\psi)\mathcal{F}f'(\psi^{-1}\phi)d\widehat{\mu}(\psi)$$

et comme $\mathcal{F}f$ et $\mathcal{F}f'$ sont à support compact, l'intégrale porte sur un sous-groupe ouvert compact K_ϕ de $\widehat{W}_R$. De même, $\mathcal{F}f(\psi) = \int_{K_f} f(g)\psi(g)d\mu(g)$ pour un sous-groupe compact ouvert car f est à support compact. On a alors le droit de permuter toutes les intégrales ce qui donne :

$$\int_{K_f}\int_{K_{f'}} f(g)f'(g')\phi(g')\left(\int_{K_\phi} \psi(g-g')d\widehat{\mu}(\psi)\right)d\mu(g)d\mu(g')$$

qui se réduit à la quantité désirée par un calcul technique classique. □

A.2 Lien avec [CT13]

On va montrer que les objets construits dans [Wei64], et généralisés dans [CT13], s'identifient au groupe métaplectique et à la représentation de Weil tels que nous les avons construits, c'est-à-dire en suivant le développement de [MVW87].

A.2.1 Construction de [Wei64] et [CT13]

Soit F un corps dont la caractéristique est différente de 2, et qui est soit fini, soit local non archimédien. Soit X un espace vectoriel de dimension finie sur F, et $W = X \times X^*$. Soit R un anneau intègre vérifiant les conditions du Corollaire A.1.1.12. En particulier, il existe un caractère lisse non trivial χ de W dans $R^\times$.

Rappels utiles

Les faits que nous exposons proviennent de [CT13, §1 & §2].

Formes quadratiques et bicaractères. On rappelle qu'une *forme quadratique* sur X est une application continue $X \to F$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $u \in F$, $f(ux) = u^2 f(x)$, et $(x, y) \mapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$ est F-bilinéaire. Un *caractère de degré 2* de X est une application $\varphi : X \to R^\times$ telle que $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}$ est un bicaractère (*i.e.* un caractère lisse en chaque variable) de $X \times X$. À toute forme quadratique f peut être associé un bicaractère $\chi \circ f$.

On note $X^* = \mathrm{Hom}_F(X, F)$ le *dual algébrique* de X, et $[.,.]$ le crochet de dualité. En identifiant $(X^*)^* \simeq X$, on écrit $[x, x^*] = [x^*, x]$ indifféremment. On rappelle que $\widehat{X} \simeq X^*$ via $x^* \mapsto \chi([., x^*])$.

Le groupe symplectique. Soit $\mathcal{B}$ la forme bilinéaire de $(X \times X^*) \times (X \times X^*)$ dans F définie par $\mathcal{B}((x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*)) = [x_1, x_2^*]$.

Définition A.2.1.1. On note $\mathrm{Sp}(W)$ le groupe des automorphismes σ de W vérifiant

$$\mathcal{B}(\sigma(w_1), \sigma(w_2)) - \mathcal{B}(\sigma(w_2), \sigma(w_1)) = \mathcal{B}(w_1, w_2) - \mathcal{B}(w_2, w_1)$$

Proposition A.2.1.2. *Muni de la forme antisymétrique :*

$$< w_1, w_2 >= \mathcal{B}(w_1, w_2) - \mathcal{B}(w_2, w_1),$$

$\mathrm{Sp}(W)$ *est le groupe symplectique classique de* $(W, < ., . >)$.

On associe à tout élément $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ une forme quadratique définie par

$$f_\sigma(w) = \frac{1}{2}(\mathcal{B}(\sigma(w), \sigma(w)) - \mathcal{B}(w, w))$$

On vérifie facilement la relation de cocycle pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Sp}(W)$

$$f_{\sigma_1,\sigma_2} = f_{\sigma_1} + f_{\sigma_2} \circ \sigma_1$$

et, pour tout $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ et tout $w_1, w_2 \in W$

$$f_\sigma(w_1 + w_2) - f_\sigma(w_1) - f_\sigma(w_2) = \mathcal{B}(\sigma(w_1), \sigma(w_2)) - \mathcal{B}(w_1, w_2)$$

Remarque A.2.1.3. On pose $\mathcal{F} = \chi \circ \mathcal{B}$. En composant par χ les relations précédentes, on obtient essentiellement des conditions analogues pour des bicaractères $\chi \circ f_\sigma$.

Définitions de $A(W)$ et $B_0(W)$. Soit $A(W)$, noté A dans la suite, l'ensemble $W \times R^\times$ muni de la loi de groupe :

$$(w, r).(w', r') = (w + w', rr'\mathcal{F}(w, w')).$$

Le centre Z de A s'identifie à $R^\times$ via $r \mapsto (0, r)$.

On note $B_0 = \mathrm{Aut}_Z(A)$ le sous-groupe des automorphismes de A triviaux sur le centre de A, *i.e.* $B_0 = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(A) \mid \forall z \in Z,\ \sigma(z) = z\}$.

Proposition A.2.1.4. *On a l'isomorphisme de groupe suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(W) \rtimes W^* & \longrightarrow & B_0 \\ (\sigma, \tau) & \longmapsto & \big((w, r) \mapsto (\sigma(w), r\varphi_{\sigma,\tau})\big) \end{array}$$

où φ *est le bicaractère défini par* $\varphi_{\sigma,\tau} = (\chi \circ f_\sigma)\ (\chi \circ \tau)$.

Définitions de U_0, $\mathbb{A}(W)$ et $\mathbb{B}_0(W)$. Soit $\mathcal{S}(X)$ l'espace des fonctions $X \to R$ localement constantes à support compact. Pour $w = (u, u^*) \in X \times X^* = W$ et $r \in R^\times$, on définit un opérateur $U(w, r) \in \mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$ de la manière suivante

$$\begin{array}{rccc} U_0 : & A & \longrightarrow & \mathrm{GL}(\mathcal{S}(X)) \\ & (w, r) & \longmapsto & (\phi \mapsto r\ \chi([., u^*])\ \Phi(. + u)) \end{array}$$

C'est un morphisme de groupes injectif, on note $\mathbb{A}$ son image. On a donc $A \simeq \mathbb{A}$ via U_0. On en déduit que leurs groupes d'automorphismes sont isomorphes, et même mieux : $\mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Aut}_Z(A) = B_0$.

De plus, le groupe B_0 agit sur $\mathbb{A}$. En effet, il agit sur A, on peut donc faire agir $B_0 \simeq \mathrm{Sp}(W) \rtimes W^*$ via U_0. Plus précisément

$$\begin{array}{ccc} (B_0, \mathbb{A}) & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ ((\sigma, \tau), U(w, r)) & \longmapsto & U(\sigma(w), r\varphi_{\sigma,\tau}(w)) \end{array}$$

Remarquons qu'à travers cette action, on a explicitement l'isomorphisme en question entre B_0 et $\mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A})$, les automorphismes de $\mathbb{A}$ triviaux sur le centre de $\mathbb{A}$. Ce centre n'est ni plus ni moins que $\{r\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(X)} \mid r \in R^\times \simeq R^\times$.

On note $\mathbb{B}_0$ le normalisateur de $\mathbb{A}$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$, *i.e.*

$$\mathbb{B}_0 = \{s \in \mathrm{GL}(\mathcal{S}(X)) \mid s\mathbb{A}s^{-1} = \mathbb{A}\}$$

Par conséquent, si $s \in \mathbb{B}_0$, alors la conjugaison par s, notée $\mathrm{conj}(s)$, est un élément de $\mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A}) \simeq B_0$.

Lemme A.2.1.5. *L'application :*

$$\begin{array}{cccc} \pi_0 & \mathbb{B}_0 & \longrightarrow & B_0 \\ & s & \longmapsto & \mathrm{conj}(s) \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Théorème A.2.1.6. *On a une suite exacte :*

$$1 \to R^\times \to \mathbb{B}_0 \overset{\pi_0}{\to} B_0 \to 1$$

où la première flèche est simplement l'inclusion $R^\times \to \{r\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(X)} \mid r \in R^\times\}$.

Le groupe métaplectique défini dans [CT13, 2.3.]

L'isomorphisme entre B_0 et $\mathrm{Sp}(W) \rtimes W^*$ donne une flèche $\mu : \mathrm{Sp}(W) \to B_0$ en associant simplement à $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$, l'image de $(\sigma, 1) \in \mathrm{Sp}(W) \rtimes W^*$ dans B_0. La seconde flèche est celle obtenue dans la sous-section précédente $\pi_0 : \mathbb{B}_0 \to \mathbb{B}_0$. Il faut se rappeler que $\mathbb{B}_0 \subset \mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$, et que π_0 a pour noyau le centre de $\mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$, on peut donc penser à B_0 comme un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(\mathcal{S}(X))$.

Définition A.2.1.7. Le groupe métaplectique de W, associé à R et χ, est le sous-groupe $\mathrm{Mp}_{R,\chi}(W) = \mathrm{Sp}(W) \times_{B_0} \mathbb{B}_0$ de $\mathrm{Sp}(W) \times \mathbb{B}_0$ composé des paires (σ, s) telles que $\mu(\sigma) = \pi_0(s)$.

Résumons la situation dans le diagramme suivant, en se rappelant que B_0 est par définition $\mathrm{Aut}_Z(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mp}_{\chi,R}(W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{B}_0 \arrow[dr] & \\
\mathrm{Sp}(W) \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A}) \arrow[d, "\wr"] \\
& \mathrm{Sp}(W) \rtimes W^* \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Aut}_Z(A)
\end{tikzcd}$$

qui peut être réécrit comme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mp}_{\chi,R}(W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{B}_0 \arrow[d, "\pi_0"] \\
\mathrm{Sp}(W) \arrow[r, "\mu"] & B_0
\end{tikzcd}$$

A.2.2 Lien avec la construction de [MVW87] et de notre Section 4.1

Soit F un corps dont la caractéristique est différente de 2, et qui est soit fini, soit local non archimédien. Soit $(W, <,>)$ un espace symplectique sur F.

Lien entre H et A. On rappelle que le groupe d'Heisenberg $H = W \times F$ est donné par la loi de groupe :

$$(w,t).(w',t') = (w + w', t + t' + \frac{1}{2} < w, w' >).$$

Le centre du groupe F est $\{(0,t) \mid t \in F\}$. Il est clairement isomorphe à F, et on se permettra souvent d'écrire – par abus – que F est le centre de H. Si l'on se donne une polarisation complète $W = X + Y$ (cf. Section 2.1), on écrira que $w = x + y$ pour signifier la décomposition de W vis-à-vis de X et Y. On peut établir un premier lien entre le groupe d'Heisenberg H défini dans [MVW87, Chap. 2] et le groupe A défini dans [CT13, §2.1]. Pour cela, on identifie $X^* \simeq Y$ et $\mathcal{B}(w,w') =< x, y' >$. Cette identification dépend donc du choix de la polarisation complète dont on se dote. Fixons en une pour le moment.

Proposition A.2.2.1. *Le morphisme :*

$$\begin{array}{cccc} \Gamma : & H & \to & A \\ & (w,t) & \mapsto & (w, \chi(t)\chi(\frac{1}{2} < x, y >)) \end{array}$$

induit un isomorphisme $\overline{\Gamma}$ entre $H/\mathrm{Ker}(\chi)$ et le sous-groupe $W \rtimes \mathrm{Im}(\chi)$ de A. Les centres de ces deux groupes sont respectivement $F/\mathrm{Ker}(\chi)$ et $\mathrm{Im}(\chi)$, qui sont bien isomorphes.

De plus, la conjugaison par $\overline{\Gamma}$ induit un isomorphisme :

$$s \in B_0 = \mathrm{Aut}_Z(A) \xrightarrow{\sim} \overline{\Gamma}^{-1} \circ s \circ \overline{\Gamma} \in \mathrm{Aut}_Z(H/\mathrm{Ker}(\chi)).$$

Démonstration. Le fait que Γ soit un un morphisme de groupes provient de :

$$\mathcal{B}(w,w') + \frac{1}{2} < x, y > + \frac{1}{2} < x', y' >= \frac{1}{2} < w, w' > + \frac{1}{2} < x + x', y + y' > .$$

L'image de Γ est $W \times \mathrm{Im}(\chi)$ et son noyau s'identifie à $\mathrm{Ker}(\chi)$. Trouver le centre de chacun des groupes en jeu est immédiat.

Ensuite, il suffit de remarquer que $\mathrm{Aut}_Z(A) = \mathrm{Aut}_Z(W \times \mathrm{Im}(\chi)) \simeq \mathrm{Aut}_Z(H/\mathrm{Ker}(\chi))$. Seule la première égalité est à prouver, la deuxième résultant de la conjugaison par $\overline{\Gamma}$. Tout élément de B_0 est de la forme $s = (\sigma, (\chi \circ f_\sigma)\ (\chi \circ \gamma))$ avec $\gamma \in W^*$, et tel que $s(w, r) = (\sigma(w), (\chi \circ f(w))\ r)$ où $f = f_\sigma + \gamma$. Donc s induit par restriction un automorphisme de $W \times \mathrm{Im}(\chi)$, qui est bien l'identité sur le centre $\mathrm{Im}(\chi) \subset R^\times$. Réciproquement, tout élément s' de $\mathrm{Aut}_Z(W \times \mathrm{Im}(\chi))$ s'écrit sous la même forme qu'un élément de B_0. En effet, soit $s' = (\sigma', \phi')$ où $\sigma' : W \times \mathrm{Im}(\chi) \to W$ et $\phi' : W \times \mathrm{Im}(\chi) \to \mathrm{Im}(\chi)$. De la loi de groupe sur $A = W \times R$ induite sur $W \times \mathrm{Im}(\chi)$, on tire comme dans le cas de B_0 [CT13, Prop. 2.1] des relations qui entraînent que : $\sigma'(w, r) = \sigma'(w)$ et $\sigma' \in \mathrm{Sp}(W)$; il existe $\gamma \in W^*$ tel que $\phi'(w, r) = (\chi \circ f_\sigma(w))(\chi \circ \gamma(w))r$. Alors l'élément $s = (\sigma', (\chi \circ f_\sigma)(\chi \circ \gamma)) \in B_0$ relève s' à A. □

Le groupe B_1. On note $\mathrm{Aut}(H)$ le groupe des automorphismes du groupe H, $\mathrm{Aut}_Z(H)$ le sous-groupe des automorphismes triviaux sur le centre de H. On décrit explicitement les éléments de $\mathrm{Aut}_Z(H)$:

Proposition A.2.2.2. *Soit $s \in \mathrm{Aut}(H)$, on note φ_s et τ_s les applications associées telles que $s((w, t)) = (\varphi_s((w, t)), \tau_s(w, t))$. On identifie alors $\mathrm{Aut}_Z(H)$ à $\mathrm{Sp}(W) \rtimes \mathrm{Hom}(W, F)$ via l'isomorphisme :*

$$s \mapsto (\sigma, \gamma) = \varphi_s|_{(W,0)}, \tau_s|_{(W,0)}).$$

Le produit étant défini par $(\sigma, \gamma).(\sigma', \gamma') = (\sigma \circ \sigma', \gamma \circ \sigma' + \gamma')$.

Démonstration. Plusieurs choses sont à vérifier. Dans l'ordre : on donne une description des relations portant sur φ_s et τ_s ; on montre que l'application du théorème est bien un morphisme ; et enfin, que $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ car elle est bien F-linéaire.

On sait que les éléments de $\mathrm{Aut}_Z(H)$ sont triviaux sur le centre. On a tout d'abord $s((w, t)) = s((0, t).(w, 0)) = (0, t).s((w, 0))$. Il suffit donc de connaître les relations portant sur $s((w, 0))$. Rappelons que pour tout $t \in F$, $s((0, t)) = (0, t)$ *i.e.* $\varphi_s((0, t)) = 0$ et $\tau_s((0, t)) = t$. Du calcul explicite de $s((w, 0)).s((w', 0)) = s((w, 0).(w', 0)) = s((w + w', \frac{1}{2} < w, w' >))$, on tire :

$$\varphi_s((w, 0)) + \varphi_s((w', 0)) = \varphi_s((w + w', 0)) \tag{A.1}$$
$$< \varphi_s((w, 0)), \varphi_s((w', 0)) >=< w, w' > \tag{A.2}$$

On obtient finalement $\varphi_s((w, t)) = \varphi_s((w, 0)) = \sigma(w)$ et $\tau_s((w, t)) = t$. On note $\tau = \tau_s$ qui est indépendant de $s \in \mathrm{Aut}_Z(H)$. La composée $s \circ s'$ de morphismes de $s, s' \in \mathrm{Aut}_Z(H)$ donne $\varphi_{s \circ s'}((w, t)) = \varphi_s((\varphi_{s'}(w), 0)) = \sigma \circ \sigma'(w)$. Et τ est inchangé. De plus, comme s est inversible, il existe un morphisme de groupe $\sigma' : W \to W$ tel que $\sigma \circ \sigma' = \mathrm{Id}_W$, donc σ est un automorphisme.

Il ne reste plus qu'à prouver que σ est F-linéaire. On déduit des équations précédentes que pour tout $\lambda \in F$, on a $< \sigma(\lambda w) - \lambda\sigma(w), \sigma(w') >= 0$. Comme σ est bijective, on conclut par le fait que la forme est non-dégénérée sur W. Donc $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$.

En résumé, pour tout $s \in \mathrm{Aut}_Z(H)$, on a $s((w, t)) = (\sigma(w), t)$ avec $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$. Réciproquement, toute application de cette forme est bien dans $\mathrm{Aut}_Z(H)$. □

On s'intéresse ici à un sous-groupe particulier de $\mathrm{Aut}_Z(H)$. On note W^* le dual algébrique de W.

Définition A.2.2.3. On définit donc B_1 comme le sous-groupe $\mathrm{Sp}(W) \rtimes W^*$ dans $\mathrm{Aut}_Z(H)$.

Proposition A.2.2.4. *Le morphisme de groupes :*

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \longrightarrow & B_0 \\ (\sigma, \gamma) & \longmapsto & (\sigma, (\chi \circ \gamma)\ (\chi \circ f_\sigma)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. C'est bien un morphisme de groupes étant donné la formule de cocyle $f_{\sigma \circ \sigma'} = f_\sigma \circ \sigma' + f_{\sigma'}$. L'injectivité et la surjectivité se vérifient aisément en se rappelant que le dual algébrique est isomorphe aux caractères de W. □

Isomorphisme entre produits fibrés. Le théorème principal que l'on se propose de montrer concerne les groupes métaplectiques définis dans [Wei64] et [MVW87]. Donnons tout d'abord une première version dans laquelle le lien avec le dernier de ces groupes est absent. Ici, $\mathbb{B}_1$ est un sous-groupe $\mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$ analogue au $\mathbb{B}_0$ dans la construction de [Wei64], [CT13].

Théorème A.2.2.5. *Le produit fibré* $\mathrm{Sp}(W) \times_{B_1} \mathbb{B}_1$ *est isomorphe à* $\mathrm{Sp}(W) \times_{B_0} \mathbb{B}_0$ *, l'isomorphisme entre* B_1 *et* B_0 *étant compatible avec les flèches respectives.*

Démonstration. La preuve va se dérouler en deux parties. Les deux diagrammes ci-dessous seront une bonne aide à la lecture, même si les objets auxquels ils se rapportent ne seront définis que par la suite.

La première est immédiate et consiste à prouver que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}(W) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Sp}(W) \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r, "\sim"] & B_0 \end{tikzcd}$$

Les flèches respectives étant : l'identité de $\mathrm{Sp}(W)$; les plongements canoniques de $\mathrm{Sp}(W)$ dans les produits semi-directs B_1 et B_0 ; l'isomorphisme de la proposition précédente.

Ensuite, dans un deuxième temps, il s'agit de s'occuper de la commutativité et des isomorphismes du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}_1 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbb{B}_0 \arrow[d] \\ \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{H}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A}) \arrow[d, "\wr"] \\ B_1 \arrow[r, "\sim"] & B_0 \end{tikzcd}$$

Lemme A.2.2.6. *Soit* $(w, t) \in H$. *On définit une application* $U_1 : H \to \mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$ *telle que, pour tout* $\phi \in \mathcal{S}(X)$, $U_1(w,t)\phi(u) = \chi(t)\chi(\frac{1}{2} < x, y >)\chi(< u, y >)\phi(u + x)$. *Alors,* U_1 *est un morphisme. Il induit un isomorphisme entre* $H/\mathrm{Ker}(\chi)$ *est son imaga, notée* $\mathbb{H}$. *Le* *diagramme qui suit est commutatif et les flèches horizontales sont des isomorphismes*

$$\begin{tikzcd} H/\mathrm{Ker}(\chi) \arrow[r, "\overline{U_1}"] \arrow[d, hook, "\overline{\Gamma}"'] & \mathbb{H} \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, "U_0"] & \mathbb{A} \end{tikzcd}.$$

De plus, la flèche verticale de droite est l'inclusion de $\mathbb{H}$ *dans* $\mathbb{A}$ *vus comme sous-groupes de* $\mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$*. L'action de* B_0 *sur* A *définie une action de* B_0 *sur* $H/\mathrm{Ker}(\chi)$ *et sur* $\mathbb{H}$*.*

Démonstration. Il suffit de noter que $U_1 = U_0 \circ \Gamma$, où Γ est le morphisme de la proposition (7) (avec $\overline{\Gamma}$). En particulier, $\mathbb{H} \simeq H/\mathrm{Ker}(\chi)$. □

Ceci va permettre d'obtenir le carré bas du diagramme. Tout d'abord, les isomorphismes $\overline{U_1}$ et U_0 induisent les isomorphismes $\mathrm{Aut}_Z(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{Aut}_Z(H/\mathrm{Ker}(\chi))$ et $\mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Aut}_Z(A)$. De plus, par la proposition (7) (avec $\overline{\Gamma}$), $\mathrm{Aut}_Z(H/\mathrm{Ker}(\chi)) \simeq \mathrm{Aut}_Z(A)$. Finalement, on obtient

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{H}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A}) \arrow[d, "\sim"] \\ B_1 \arrow[r, "\sim"] & B_0 \end{tikzcd}$$

La flèche $\mathrm{Aut}_Z(\mathbb{H}) \to \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A})$ est l'inverse de la restriction à $\mathbb{H}$, *i.e.* l'inverse de $f \in \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A}) \to f|_{\mathbb{H}} \in \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{H})$.

Pour rappel, écrivons explicitement les isomorphismes entre ces groupes

$$U_0 \circ \mathrm{Aut}_Z(A) \circ U_0^{-1} = \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{A})$$

$$\overline{U_1} \circ \mathrm{Aut}_Z(h) \circ \overline{U_0}^{-1} = \mathrm{Aut}_Z(\mathbb{H})$$

$$\overline{\gamma}^{-1} \circ \mathrm{Aut}_Z(h) \circ \overline{\Gamma} = \mathrm{Aut}_Z(H/\mathrm{Ker}(\chi))$$

Pour finir, occupons-nous du carré du haut. Par construction, $\mathbb{B}_0$ et $\mathbb{B}_1$ sont les normalisateurs de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{H}$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$. Ces normalisateurs sont les mêmes car $\mathbb{A} = R^\times \mathbb{H}$ et $R^\times$ est dans le centre de $\mathrm{GL}(\mathcal{S}(X))$. □

Bibliographie

[Ban99] D. Ban. Parabolic induction and Jacquet modules of representations of $O(2n, F)$. *Glas. Mat. Ser. III*, 34(54) :147–185, 1999.

[BH06] C. J. Bushnell and G. Henniart. *The local Langlands conjecture for GL*(2). Springer, 2006.

[Bor91] A. Borel. *Linear algebraic groups*. Springer, 1991.

[Bou12] Bourbaki. *Algèbre, Chapitre 8 : Modules et anneaux semisimples*. Springer, 2012.

[BZ76] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsk. Representations of the group $\mathrm{GL}(n, F)$ where F is a non-archimedean local field. *Russian Math. Surveys*, 31 :3 :1–68, 1976.

[BZ77] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p-adic groups. i. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 4è série*, 10(4) :441–472, 1977.

[Coh13] J. Cohen. *Deux résultats d'analyse harmonique sur un groupe p-adique tordu*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 2013.

[CT13] G. Chinello and D. Turchetti. Weil representation and metaplectic groups over an integral domain. *Communications in algebra*, 43 :6 :2388–2419, 2013.

[Dat05] J.-F. Dat. ν-tempered representations of p-adic groups I : ℓ-adic case. *Duke Math. J.*, 126(3) :397–469, 2005.

[Dat09] J.-F. Dat. Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(1) :261–333, 2009.

[Dat18] J.-F. Dat. Simple subquotients of big parabolically induced representations of p-adic groups. *J. Algebra*, 510 :499–507, 2018.

[Die43] J. Dieudonné. Les déterminants sur un corps non commutatif. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 71 :27–45, 1943.

[Dud18] O. Dudas. Non-uniqueness of supercuspidal support for finite reductive groups. *J. Algebra*, page to appear, 2018.

[Fla79] Flath. Decomposition of representations into tensor products. In *Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. in Pure Maths XXXIII*, pages 275–286. AMS, 1979.

[GH97] D. Goldberg and R. Herb. Some results on the admissible representations of non-connected reductive p-adic groups. *Ann. Sci. de l'ENS 4ème série*, 30(1) :97–146, 1997.

[GI14] W. T. Gan and A. Ichino. Formal degrees and local theta correspondence. *Invent. Math.*, 195(3) :509–672, 2014.

[GK71] I. M. Gelfand and D. A. Kazhdan. Representations of the group $\mathrm{GL}(n, K)$ where K is a local field. In *Lie Groups and their representations*, pages 95–118. Adams Hilger Ltd, 1971.

[GS17] W. T. Gan and B. Sun. The Howe duality conjecture : quaternionic case. In *Representation theory, number theory and invariant theory*, volume 323, in honor of R. Howe's 70th birthday of *Progress in Mathematics*, pages 175–192. Weizmann, Cham, 2017.

[GT11] W. T. Gan and S. Takeda. The local Langlands conjecture for GSp(4). *Ann. of Math. (2)*, 173(3) :1841–1882, 2011.

[GT16] W. T. Gan and S. Takeda. A proof of the Howe duality conjecture. *J. of the Amer. Math. Society*, 29(3) :473–493, 2016.

[HC64] Harish-Chandra. Invariant distributions on lie algebras. *Amer. J. of Math.*, 86(2) :271–309, 1964.

[HC70] Harish-Chandra. *Harmonic analysis on reductive p-adic groups.* Springer, 1970.

[HM10] M. Hanzer and G. Muic. Parabolic induction and jacquet functors for metaplectic groups. *J. of Algebra*, 323 :241–260, 2010.

[How89] R. Howe. Transcending classical invariant theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 2 :535–552, 1989.

[KM17] R. Kurinczuk and N. Matringe. Rankin-Selberg local factors modulo ℓ. *Selecta Math. New. Ser.*, 23 :767–811, 2017.

[Kot05] R. E. Kottwitz. Harmonic analysis on reductive p-adic groups and lie algebras. In J. Arthur, D. Ellwood, and R. Kottwitz, editors, *Harmonic analysis, the trace formula and Shimura varieties*, pages 393–522. American Mathematical institute, 2005.

[KR92] S. S. Kudla and S. Rallis. Ramified degenerate principal series representations for $\mathrm{Sp}(n)$. *Israel J. Math.*, 78 :209–256, 1992.

[KR05] S. S. Kudla and S. Rallis. On first occurrence in the local theta correspondence. In *in J. Cogdell et al., eds, Automorphic Representations, L-functions and Applications : Progress and Prospects*, pages 273–308, 2005.

[KS97] S. S. Kudla and W. J. Jr. Sweet. Degenerate principal series representations for $U(n, n)$. *Israel J. Math.*, 98 :253–306, 1997.

[Kud86] S. S. Kudla. On the local theta correspondence. *Invent. Math.*, 83 :229–255, 1986.

[Kud94] S. S. Kudla. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs. *Israel Journal of Mathematics*, 87 :1-3 :361–401, February 1994.

[Kud96] S. S. Kudla. http ://www.math.toronto.edu/skudla/castle.pdf, notes on the local theta correspondence. 1996.

[Mín06] A. Mínguez. *Correspondance de Howe ℓ-modulaire : paires duales de type II.* PhD thesis, Université d'Orsay, 2006.

[Mín08] A. Mínguez. Correspondance de Howe explicite : paires duales de type ii. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 41(5) :717–741, 2008.

[Moo68] C. C. Moore. Group extensions of p-adic and adelic linear groups. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, 35 :5–70, 1968.

[MS14] A. Mínguez and V. Sécherre. Représentations lisses modulo ℓ de $\mathrm{GL}_m(d)$. *Duke Math J.*, 163 :795–887, 2014.

[MT02] C. Moeglin and M. Tadic. Construction of discrete series for classical p-adic groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 15 :715–786, 2002.

[MVW87] C. Moeglin, M.-F. Vigneras, and J.-L. Waldspurger. *Correspondance de Howe sur un corps p-adique.* Springer, 1987.

[Per81] P. Perrin. Représentations de Schrödinger, indices de Maslov et groupe métaplectique. In *Non commutative harmonic analysis and Lie groups, Proceedings Marseille-Luminy 1980*, pages 370–407. Springer LN 880, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[PR94] V. Platonov and A. Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory.* Academic press inc, 1994.

[Ral84] S. Rallis. On the Howe duality conjecture. *Compositio Mathematica*, 51(3) :333–3999, 1984.

[Ren09] D. Renard. *Représentations des groupes réductifs p-adiques.* SMF, 2009.

[Rob96] B. Roberts. The theta correspondence for similitudes. *Israel J. Math.*, 94 :285–317, 1996.

[RR93] R. Ranga Rao. On some explicit formulas in the theory of Weil representation. *Pacific J. Math.*, 157(2) :335–371, 1993.

[Ser92] J.-P. Serre. *Lie Algebras and Lie Groups : 1964 Lectures Given at Harvard University.* Number 1500 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1992.

[Ser97] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1997.

[SS74] T. A. Springer and R. Steinberg. *Conjugacy classes in algebraic groups.* Springer, 1974.

[Ste62] R. Steinberg. Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques. In *Colloque sur la théorie des groupes algébriques*, pages 113–128, Bruxelles, 1962.

[Swe95] W. J. Jr. Sweet. Functional equations of p-adic zeta integrals and representations of the metaplectic group. *preprint*, 1995.

[Tad95] M. Tadic. Structure arising from induction and Jacquet modules of representations of classical p-adic group. *J. of Algbera*, 177 :1–33, 1995.

[Vig96] M.-F. Vigneras. *Représentations ℓ-modulaires d'un groupe réductif p-adiques avec $l \neq p$.* Birkhäuser, 1996.

[Vig01] M.F. Vigneras. Correspondance de Laglands semi-simple pour $\mathrm{GL}(n, F)$ modulo $l \neq p$. *Invent. Math.*, 144 :177–223, 2001.

[Vig06] M.-F. Vigneras. The arithmetic of quaternion algebra. 2006.

[Wal90] J.-L. Waldspurger. Démonstration d'une conjecture de Howe dans le cas p-adique, $p \neq 2$. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I*, Israel Math. Conf. Proc. 2, pages 267–324. Weizmann, Jerusalem, 1990.

[Wei64] A. Weil. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111 :143–211, 1964.

[Wei94] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge university press, 1994.

[Yam11] S. Yamana. Degenerate principal series for quaternionic unitary groups. *Israel J. Math.*, 185 :77–124, 2011.